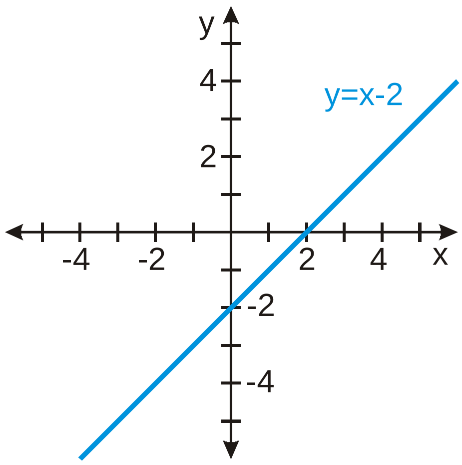
2.1.13 Funkce rostoucí, funkce klesající I

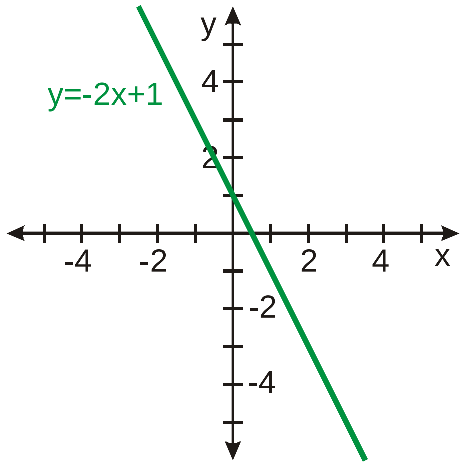
Předpoklady: 2111

Pedagogická poznámka: Následující příklad je dobrý na opakování. Můžete ho studentům zadat na čas a ten kdo ho nestihne nebo nedokáže vyřešit, by měl dostat mínus. Slouží to k tomu, aby studenti alespoň trochu věděli, co probrali v minulých hodinách a udrželi se v obraze.

Př. 1: Nakresli vedle sebe grafy funkcí $y = x - 2$ a $y = -2x + 1$. Porovnej, jak se s rostoucí hodnotou proměnné *x* mění hodnoty *y*.



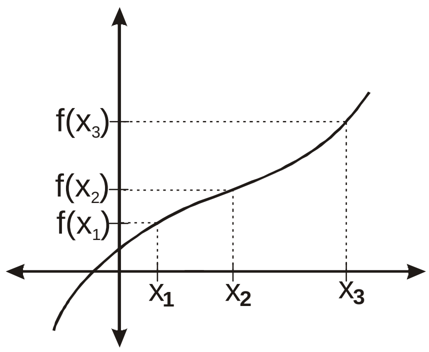
větší hodnoty *x* mají větší hodnoty *y* $\Rightarrow$ čára jde nahoru $\Rightarrow$ **funkce roste**



větší hodnoty *x* mají menší hodnoty *y* $\Rightarrow$ čára jde dolu $\Rightarrow$ **funkce klesá**

Jak definovat zda je funkce rostoucí (klesající) matematicky, tedy pomocí operací s čísly, jako je porovnávání, sčítání apod.

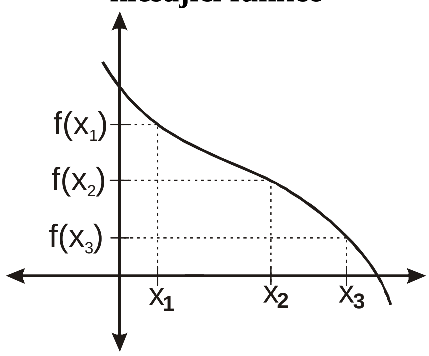
rostoucí funkce



platí $x_1 < x_2 < x_3$

- máme nakreslenou hodnotu $f(x_2)$, chceme nakreslit hodnotu $f(x_3)$, čára má stoupat $\Rightarrow$ bod $[x_3; f(x_3)]$ musí být výš $\Rightarrow$ hodnota

klesající funkce



platí $x_1 < x_2 < x_3$

- máme nakreslenou hodnotu $f(x_2)$, chceme nakreslit hodnotu $f(x_3)$, čára má klesat $\Rightarrow$ bod $[x_3; f(x_3)]$ musí být níž $\Rightarrow$ hodnota

$f(x_3) > f(x_2)$

- máme nakreslenou hodnotu $f(x_2)$, chceme nakreslit hodnotu $f(x_1)$, čára má stoupat $\Rightarrow$ bod $[x_1; f(x_1)]$ musí být níž $\Rightarrow$ hodnota $f(x_1) < f(x_2)$

Je-li $x_1 < x_2$ musí být $f(x_1) < f(x_2)$

$f(x_2) > f(x_3)$

- máme nakreslenou hodnotu $f(x_2)$, chceme nakreslit hodnotu $f(x_1)$, čára má klesat $\Rightarrow$ bod $[x_1; f(x_1)]$ musí být výš $\Rightarrow$ hodnota $f(x_1) > f(x_2)$

Je-li $x_1 < x_2$ musí být $f(x_1) > f(x_2)$

$\Rightarrow$

Definice:

Funkce $f(x)$ se nazývá rostoucí právě, když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$.

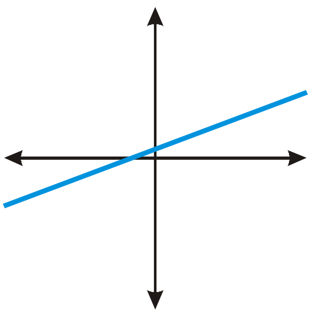
Př. 2: Zformuluj definici klesající funkce.

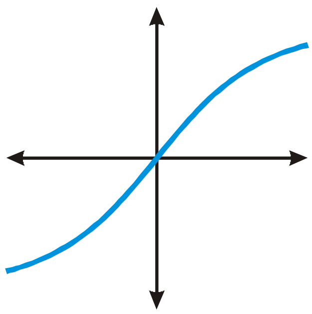
Definice:

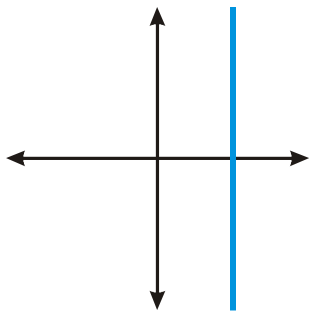
Funkce $f(x)$ se nazývá klesající právě, když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$.

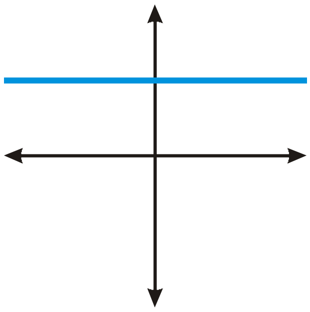
Pedagogická poznámka: Při předchozím příkladu se třída rozdělí na dvě skupiny (fakticky možných řešení je víc, ale všechny je možné převést do jedné ze dvou skupin):
„jednoobraceči“ - je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$
„dvouobraceči“ - je-li $x_1 > x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$
Nechávám studenty, aby nakreslili obrázek, který popisuje jejich definice (tedy body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$ a podle obrázku sami rozhodli, jestli je taková funkce klesající nebo ne. U většiny dvou obraceců je však problém v tom, že i když do první nerovnosti napsali $x_1 > x_2$ nakreslí x_1 do obrázku nalevo od x_2.
Někteří se nad příkladem pořádně nezamysleli a zkusili napsat řešení automaticky, u jiných však při další diskusi zjistíte, že pořádně nerozumí smyslu funkce (přiřazování hodnot) nebo se neorientují v grafech.

Př. 3: Rozhodni, které z funkcí na obrázcích jsou rostoucí, které klesající a které nemají ani jednu z těchto vlastností.

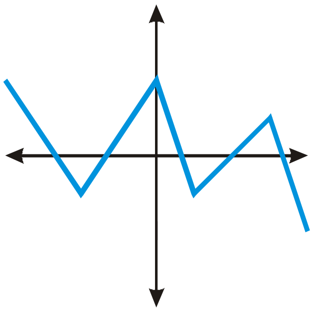

a)


b)

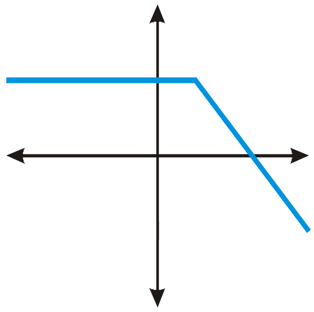

c)



d)



e)



f)

Rostoucí funkce: a) b)
Klesající funkce: ani jedna
Funkce nepatřící ani do jedné ze skupin: d), e), f)
Obrázek, který neobsahuje funkcí: c)

Pedagogická poznámka: Existují i další příklady funkcí, u kterých je zajímavé diskutovat, zda jsou rostoucí nebo klesající, ale uvádím je později, až na ně dojde při výkladu řada.

Pedagogická poznámka: Z následujícího příkladu jsem poprvé také zadával pouze druhou část, jenže se ukázalo, že studenti mají problém vyřešit i zcela nematematický problém s řidičákem. Proto jsou tam oba.

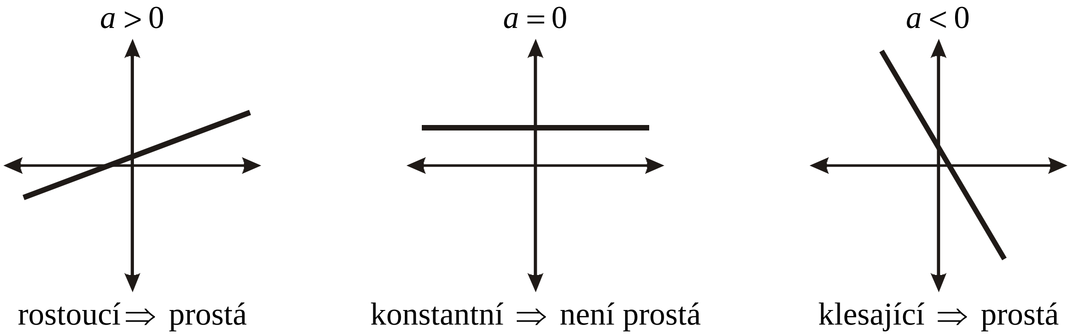
Př. 4: Rozhodni, zda existuje vztah (jsou rovnocenné, jeden vyplývá z druhého apod.) mezi následujícími dvojicemi výroků:
a) Pavel je plnoletý. Pavel má řidičák na osobní auto.
b) Funkce je rostoucí (klesající). Funkce je prostá.

a)
Pokud je Pavel plnoletý, může ale nemusí mít řidičák na osobní auto.
Pokud Pavel má řidičák na osobní auto, musí být plnoletý (plnoletost je podmínkou udělení řidičského průkazu skupiny B).
$\Rightarrow$ Z faktu, že Pavel má řidičák na osobní auto, vyplývá, že je plnoletý.
Obrácená implikace neplatí.
b)
Je-li funkce rostoucí, je prostá (pokud hodnota pro každé další x musí být větší než všechny předešlé, nemůže se žádná hodnota y dvakrát opakovat).
Obrácená implikace neplatí. Prostá funkce může být klidně rostoucí i klesající.
Je-li funkce klesající, je prostá (pokud hodnota pro každé další x musí být menší než všechny předešlé, nemůže se žádná hodnota y dvakrát opakovat).
Obráceně to neplatí. Prostá funkce může být klidně rostoucí i klesající

Pedagogická poznámka: Společně si oba pojmy (rostoucí a klesající funkce) nakreslíme do přehledu souvislostí z minulé hodiny.

Př. 5: Rozhodni, pro které hodnoty parametrů a, b je lineární funkce rostoucí (klesající) a prostá.

Zda je lineární funkce rostoucí nebo klesající záleží na směru $\Rightarrow$ záleží pouze na a.
Tři možnosti:

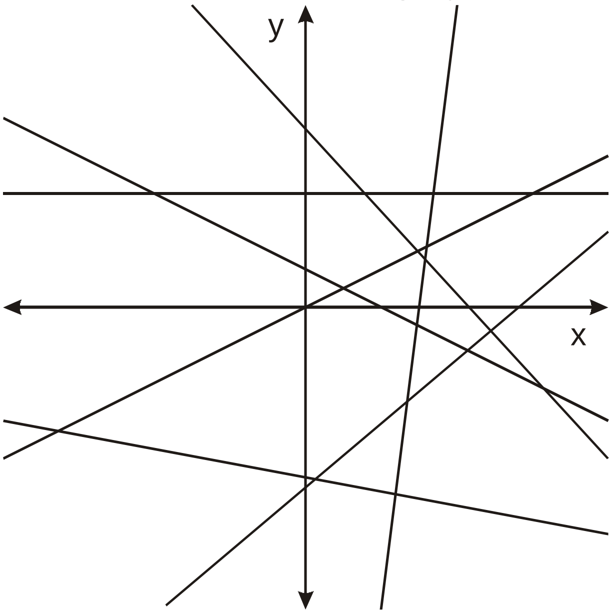


Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu se třída rozdělí na dvě skupiny. Ta první řekne správný výsledek s tím, že je to jasné, že to každý vidí. Druhá neví a to i v případě, že lineární funkci umí jak nakreslit, tak zjistit její předpis z grafu. Proto si ukazujeme následující „objevovací“ postupy. Pro matematickou budoucnost studentů mohou být podstatnější než definice rostoucí funkce.

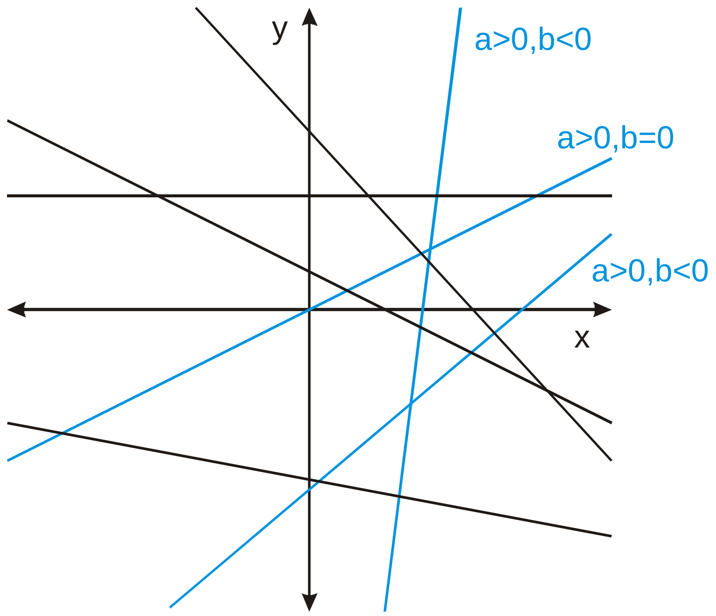
Existují nějaké „objevovací“ postupy, které vedou k výsledku předchozího příkladu?

„Hledání společného rysu“

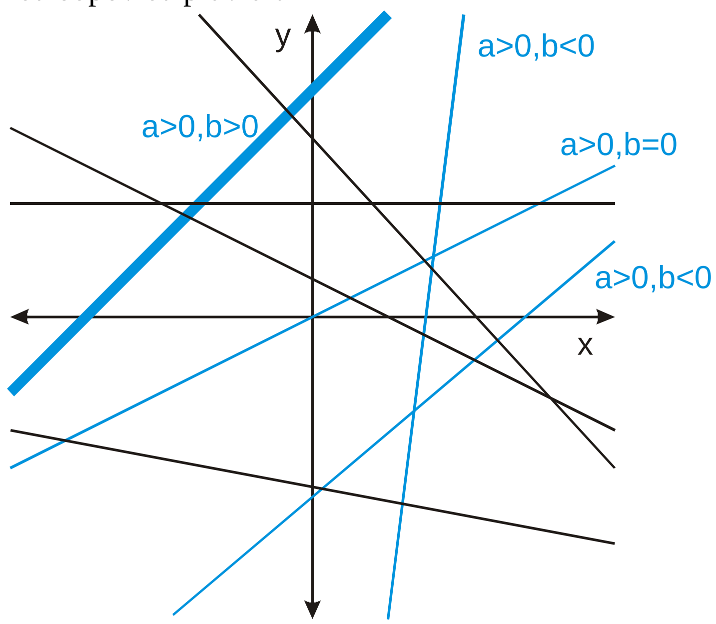
1. nakreslíme (představíme si) grafy mnoha, co nejrůznějších lineárních funkcí:



2. vybereme grafy funkcí, které jsou rostoucí, a píšeme si k nim hodnoty parametrů *a*, *b*:



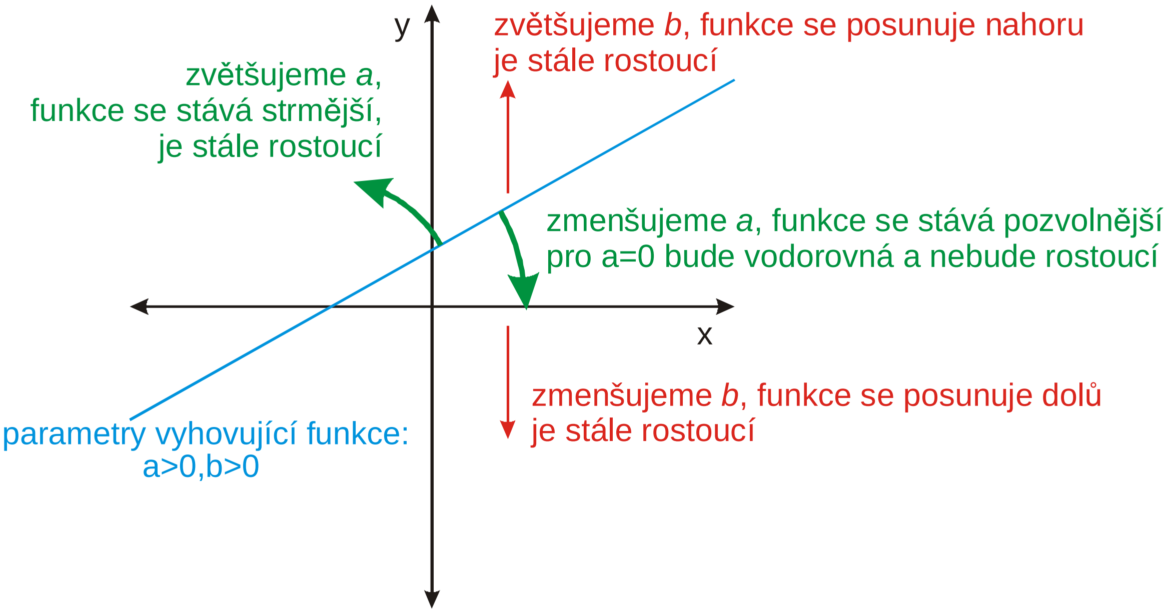
3. zhodnotíme situaci: zdá se, že pokud je kladná hodnota *a*, je lineární funkce rostoucí bez ohledu na *b* $\Rightarrow$ musíme si odhad ověřit (spousta možností, použijeme jen některé)
4. nakreslíme další rostoucí funkci, co nejodlišnější od těch, které už máme a zkontrolujeme, zda odpovídá pravidlu



$\Rightarrow$ lineární funkce $y = ax + b$ je rostoucí pokud platí $a > 0$, na *b* nezáleží

„Dohánění do extrému“

Nakreslíme si správnou funkci a zkusíme ji dohnat extrému
Například si nakreslíme funkci, která odpovídá našemu požadavku (je rostoucí), určíme jaké má parametry a pak budeme měnit oba parametry a sledovat, jak se mění graf, zda je pořád rostoucí nebo ne.



$\Rightarrow$ lineární funkce $y = ax + b$ je rostoucí pokud platí $a > 0$, na b nezáleží

„Sledování významu“

srovnáme s požadavky na rostoucí funkci s významem konstant
o tom zda je funkce rostoucí rozhoduje její sklon

- b – nemění sklon funkce $\Rightarrow$ nemá vliv zda je rostoucí nebo ne
- a – určuje sklon funkce $\Rightarrow$ rozhoduje, zda je funkce rostoucí nebo ne

Předchozí úvahy nejsou pro matematika dostatečné $\Rightarrow$ musím udělat důkaz, který bude vycházet z definice.

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady jsou podle mého názoru poměrně obtížně a hlavně pro studentské uvažování zbytečné (proč složitě odůvodňovat něco, co je jasné). Pokud studentům nedojde, o co vlastně jde, snažím se je uklidňovat tím, že to není pro středoškolskou matematiku to nejpodstatnější.
Pokud se k nim vůbec nedostaneme nic se neděje. Dobře poslouží jako bonus pro jedničkáře.

Př. 6: Dokaž z definice, že funkce $y = x - 2$ je rostoucí.

Potřebujeme: když je $x_1 < x_2$ je $f(x_1) < f(x_2)$.

Víme: $x_1 < x_2$. Jak je to s $f(x_1) = x_1 - 2$; $f(x_2) = x_2 - 2$?

Vyjdeme: $x_1 < x_2$, od obou stran odečtu 2

$x_1 - 2 < x_2 - 2$, získali jsme $f(x_1)$; $f(x_2)$

Shrneme:

$x_1 < x_2$

$f(x_1) = x_1 - 2 < x_2 - 2 = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Dokázáno.

Př. 7: Dokaž z definice, že funkce $y = -2x + 1$ je klesající.

Potřebujeme: když je $x_1 < x_2$ je $f(x_1) > f(x_2)$.

Víme: $x_1 < x_2$. Jak je to s $f(x_1) = -2x_1 + 1$; $f(x_2) = -2x_2 + 1$?

Vyjdeme $x_1 < x_2$, na obou stranách se snažíme vyrobit $f(x_1)$; $f(x_2)$

$-2x_1 > -2x_2$ (vynásobeno –2, obracíme nerovnost)

$-2x_1 + 1 > -2x_2 + 1$, získali jsme $f(x_1)$; $f(x_2)$

Shrneme:

$x_1 < x_2$

$f(x_1) = -2x_1 + 1 > -2x_2 + 1 = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Dokázáno.

Shrnutí: Objevovat můžeme: „hledáním společného rysu“, „doháněním do extrému“ nebo „sledováním významu“.