2.1.11 Lineární funkce IV

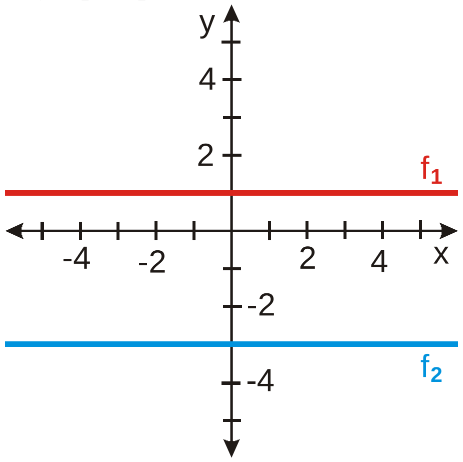
Předpoklady: 2110

Pedagogická poznámka: Říkám studentům, že cílem hodiny není naučit se něco nového, ale použít to, co už známe (a možná se také přesvědčit o tom, jak se nemůžeme obejít bez toho, co jsme v několika minulých hodinách probírali).

Pedagogická poznámka: Hodina patří mezi ty, kde je rychlost postupu hodně rozdílná. Polovina třídy příklady v hodině spočítat nestihne, ale najdou se takoví, kteří budou hotoví za 25 minut. Kvůli rozdílům v rychlosti a kvůli tomu, že odečítání hodnot ze stěny je obtížné mám zadání příkladů připravené na zvláštním papíře (oboustranná A5).

Pedagogická poznámka: Je dobré sledovat, jakým způsobem se studenti k následujícím příkladům staví. V případě potřeby je upozorněte, že řešení má dvě části:
a) nejprve se obecně rozhodneme, o který druh lineární funkce jde
b) podle druhu funkce použijeme odpovídající postup

Př. 1: Najdi předpis lineárních funkcí na obrázku.

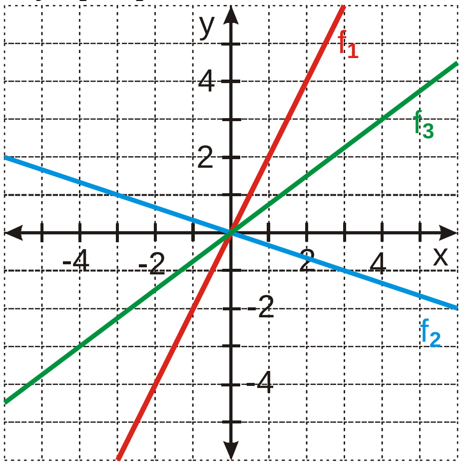


Obě funkce jsou konstantní, mají tvar $y = b$.

Funkce f_1 prochází bodem $[0;1]$ $\Rightarrow$ jde o funkci $f_1 : y = 1$.

Funkce f_2 prochází bodem $[0;-3]$ $\Rightarrow$ jde o funkci $f_2 : y = -3$.

Př. 2: Najdi předpis lineárních funkcí na obrázku.



Všechny funkce jsou přímé úměrnosti $\Rightarrow$ mají tvar $y = ax$

Funkce f_1 prochází bodem $[1;2]$ $\Rightarrow$ dosadíme do předpisu $2 = a \cdot 1 \Rightarrow a = 2$ jde o funkci $f_1 : y = 2x$.

Funkce f_2 prochází bodem $[3;-1]$ $\Rightarrow$ dosadíme do předpisu $-1 = a \cdot 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$ jde o funkci $f_2 : y = -\frac{1}{3}x$.

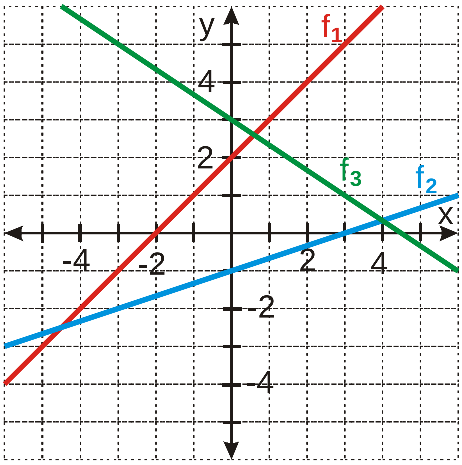
Funkce f_3 prochází bodem $[4;3]$ $\Rightarrow$ dosadíme do předpisu $3 = a \cdot 4 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$ jde o funkci $f_3 : y = \frac{3}{4}x$.

Pedagogická poznámka: Jde o první případ dosazování bodů grafu do předpisu funkce, je potřeba dát pozor na to, zda studenti ví, kterou hodnotu kam mají dosazovat. Společně si také kontrolujeme, že nezáleží na tom, který bod funkce si vybereme a vždy získáme stejný výsledek.

Pedagogická poznámka: Při posledním průchodu (s 8O2012) jsem se setkal i s tím, že studenti už v tomto příkladě používají vzorec $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (říkáme mu rychlostní, kvůli analogii se vzorcem $v = \frac{\Delta y}{\Delta x}$), což je samozřejmě také možné.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu chci, aby si studenti, ještě před dosazením do předpisu funkce udělali představu o tom, jaká má přibližně být hodnota a (například u funkce f_1 očekáváme $a > 1$).

Př. 3: Najdi předpis lineárních funkcí na obrázku.



Nejde ani o konstantní funkce ani o přímé úměrnosti $\Rightarrow$ musíme najít hodnoty *a* i *b*

Funkce f_1:

prochází bodem $[0;2]$ $\Rightarrow$ graf je posunutý o 2 nahoru $\Rightarrow$ platí $b=2 \Rightarrow$ $y=ax+2$

Funkce prochází bodem $[-2;0]$ dosadíme do předpisu $y=ax+2$ $\Rightarrow 0=a\cdot(-2)+2 \Rightarrow a=1$

$\Rightarrow$ jde o funkci $f_1: y=x+2$.

Funkce f_2:

prochází bodem $[0;-1]$ $\Rightarrow$ graf je posunutý o 1 dolů $\Rightarrow$ platí $b=-1 \Rightarrow$ $y=ax-1$

Funkce prochází bodem $[3;0]$ dosadíme do předpisu $y=ax-1$ $\Rightarrow 0=a\cdot 3-1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ jde o funkci $f_2: y=\frac{1}{3}x-1$.

Funkce f_3:

prochází bodem $[0;3]$ $\Rightarrow$ graf je posunutý o 3 nahoru $\Rightarrow$ platí $b=3 \Rightarrow$ $y=ax+3$

Funkce prochází bodem $[3;1]$ dosadíme do předpisu $y=ax+3$ $\Rightarrow 1=a\cdot 3+3 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ jde o funkci $f_3: y=-\frac{2}{3}x+3$.

Pedagogická poznámka: Slabší studenti mají v předchozím příkladě problémy s tím, že se v příkladě ztratí. Napíší si předpis funkce se správnou hodnotou *b*, ale odečtený bod dosazují do předpisu $y=ax$, což samozřejmě vede ke špatnému výsledku. Je s tím potřeba bojovat od samého začátku, neschopnost orientace v tom, co vlastně dělají je u mnoha typů rovnic a nerovnic příčinou neúspěchů.

Př. 4: Lineární funkce prochází body[1,1] a [3,-2]. Urči její předpis:
a) pomocí soustavy rovnic
b) pomocí významu konstant *a* a *b*

a) pomocí soustavy rovnic

body $[1;1]$ a $[3;-2]$ musí vyhovovat předpisu funkce $y=ax+b$

$[1;1] \Rightarrow 1=a\cdot 1+b$ $\qquad$ $[3;-2] \Rightarrow -2=3a+b$

$\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic: $\begin{aligned} a+b&=1 \\ 3a+b&=-2 \end{aligned}$

vyjádříme si b z první rovnice: $b=1-a$ a dosadíme do druhé:

$3a+(1-a)=-2$

$2a=-3$

$a=-\frac{3}{2}$

dopočítáme b: $b=1-a=1-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}=2,5$

Lineární funkce má předpis $y=-1,5x+2,5$.

b) pomocí významu konstant *a* a *b*

použijeme $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$[1;1]=[x_1;y_1]$; $[3;-2]=[x_2;y_2]$

$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-1}{3-1}=-\frac{3}{2}=-1,5$

když známe a tak dopočteme b pomocí rovnice o jedné neznámé

$1=-1,5x+b$

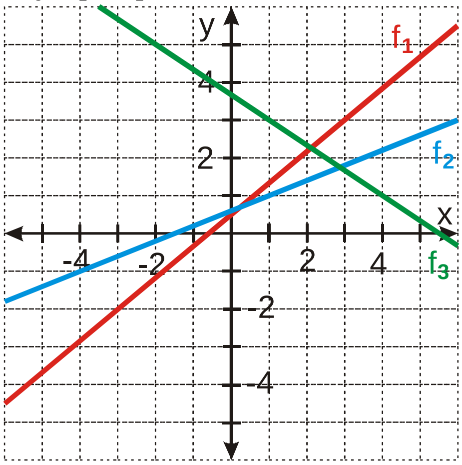
$y=-1,5x+2,5$

$b=2,5$

Lineární funkce má předpis $y=-1,5x+2,5$.

I z obráceného postupu vidíme, že lineární funkce je dána dvěma body.

Př. 5: Najdi předpis lineárních funkcí na obrázku.



Žádná z nakreslených funkcí neprochází ani počátkem ani osou y v jednom z označených bodů $\Rightarrow$ pro každý graf musíme najít dva body a z nich předpis dopočítat.

Funkce f_1:

Najdeme body, kterými funkce prochází: $[-3;-2]$ a $[3;3]$.

Řešíme pomocí soustavy rovnic, dosazujeme do předpisu $y=ax+b$:

$[-3;-2] \quad \Rightarrow \quad -2 = a(-3)+b \quad \Rightarrow \quad -3a+b=-2 \quad \Rightarrow \quad b=3a-2$

$[3;3] \quad \Rightarrow \quad 3 = a\cdot 3+b \quad \Rightarrow \quad 3a+b=3 \quad \Rightarrow \quad b=3-3a$

Platí: $b=b$ a tedy i $3a-2=3-3a$

$6a=5$

$a=\frac{5}{6}$

Dopočteme *b*: $b=3a-2=3\left(\frac{5}{6}\right)-2=\frac{1}{2}$

Pro funkci f_1 platí: $y=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}$

Funkce f_2:

Najdeme body, kterými funkce prochází: $[-4;-1]$ a $[1;1]$.

použijeme $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$[-4;-1]=[x_1;y_1]$; $[1;1]=[x_2;y_2]$

$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-(-1)}{1-(-4)}=\frac{2}{5}$

Dopočteme *b*:

$[1;1] \quad \Rightarrow \quad 1=a\cdot 1+b$, dosadíme $a=\frac{2}{5} \Rightarrow 1=\frac{2}{5}\cdot 1+b$

$b=\frac{3}{5}$

Pro funkci f_2 platí: $y=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}$

Funkce f_3:

Najdeme body, kterými funkce prochází: $[1;3]$ a $[4;1]$.

Řešíme pomocí soustavy rovnic, dosazujeme do předpisu $y=ax+b$:

$[1;3] \quad \Rightarrow \quad 3=a\cdot 1+b \quad \Rightarrow \quad a+b=3$

$[4;1] \quad \Rightarrow \quad 1=a\cdot 4+b \quad \Rightarrow \quad 4a+b=1$

Soustava: $\begin{array}{r} a+b=3 \\ 4a+b=1 \end{array}$

Odečteme rovnice:

$4a-a+b-b=1-3$

$3a=-2$

$a=-\frac{2}{3}$

Dosadíme do rovnice a vypočteme *b*: $-\frac{2}{3}+b=3$

$b=\frac{11}{3}$

Pro funkci f_3 platí: $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$

Pedagogická poznámka: V příkladě 5 mohou studenti samozřejmě používat libovolný z postupů použitých v příkladě 4.

Př. 6: Petáková:
strana 27 cvičení 33 a) b) d) e)

Shrnutí: Souřadnice bodů, které tvoří graf funkce můžeme dosazovat do jejího předpisu a tím ho v případě potřeby určit.