

## 2.1.10 Lineární funkce III

**Předpoklady:** 2109

### Minulá hodina

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru  $y = ax + b$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Grafem lineární funkce je přímka (část přímky).

**Pedagogická poznámka:** Než začnou studenti kreslit grafy, je dobré si popovídat o strategii na volbu bodů, které použijí na kreslení grafů.

Nepřestává mě překvapovat, jak velký problém pro studenty kreslení následujících grafů představuje. Nezbyvá než vydržet a snažit se jim radit, jak by mohli kreslení urychlit. Důležité je hlídat, aby si nepletli  $x$  a  $y$ , hodně chyb vzniká i tím, že studenti nejdřív spočítají všechny body u všech funkcí a pak teprve začnou kreslit. Myslím, že je třeba se snažit, aby tento postup nepoužívali. Jednak se jim může něco splést a jednak se tím ztrácí souvislost mezi spočítaným a nakresleným. Samozřejmě nikde není dáno, že by studenti měli pro nakreslení grafů používat stejné body jako učebnice.

**Pedagogická poznámka:** U pomalejších studentů nečekáme až u prvních dvou příkladů nakreslí všechny čtyři grafy. Stačí, když udělají dva, obrázek všech grafů si mohou prohlédnout na stěně a vyvozovat z něj.

### Jaký je význam konstant $a$ , $b$ ?

#### Nejdřív $b$ .

**Př. 1:** Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí:  $f_1: y = x$ ,  $f_2: y = x + 1$ ,  $f_3: y = x + 3$ ,  $f_4: y = x - 2$ . Podle obrázku rozhodni, jak ovlivňují hodnoty parametru  $b$  graf lineární funkce.

$$f_1: y = x$$

dosazujeme  $x = 0 \Rightarrow y = x = 0 \Rightarrow$  bod  $[0; 0]$

dosazujeme  $x = 2 \Rightarrow y = x = 2 \Rightarrow$  bod  $[2; 2]$

$$f_2: y = x + 1$$

dosazujeme  $x = 0 \Rightarrow y = x + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow$  bod  $[0; 1]$

dosazujeme  $x = 2 \Rightarrow y = x + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow$  bod  $[2; 3]$

$$f_3: y = x + 3$$

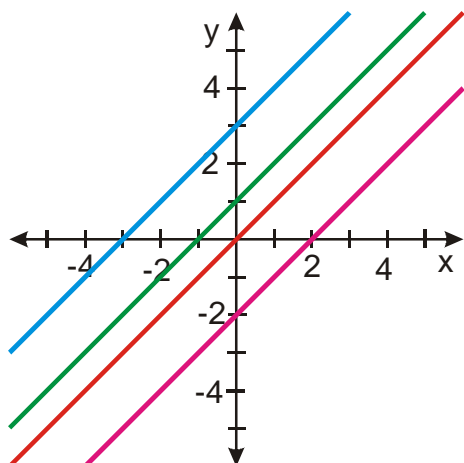
dosazujeme  $x = 0 \Rightarrow y = x + 3 = 0 + 3 = 3 \Rightarrow$  bod  $[0; 3]$

dosazujeme  $x = 2 \Rightarrow y = x + 3 = 2 + 3 = 5 \Rightarrow$  bod  $[2; 5]$

$$f_4: y = x - 2$$

dosazujeme  $x = 0 \Rightarrow y = x - 2 = 0 - 2 = -2 \Rightarrow$  bod  $[0; -2]$

dosazujeme  $x = 2 \Rightarrow y = x - 2 = 2 - 2 = 0 \Rightarrow$  bod  $[2; 0]$



$\Rightarrow$  všechny grafy mají stejný směr, ale jsou různě posunuté ve svislém směru.  $\Rightarrow$  konstanta  $b$  neovlivňuje směr přímky, ale její posunutí ve svislém směru (průsečík s osou  $y$ ).

**Poznámka:** Metoda, kterou jsme použili je vlastně fyzikální metodou na objevování funkčních závislostí. Jednu proměnou jsme měnili a vše ostatní nechávali stejné, abychom zjistili, jak měnící se proměnná ovlivňuje výsledek.

**Ted' a.**

**Př. 2:** Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí:  $f_1: y = x + 1$ ,  $f_2: y = 3x + 1$ ,  $f_3: y = 0,5x + 1$ ,  $f_4: y = -2x + 1$ . Podle obrázku rozhodni, jak ovlivňují hodnoty parametru  $a$  graf lineární funkce.

$$f_1: y = x + 1$$

$$\text{dosazujeme } x = 0 \Rightarrow y = x + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{bod } [0; 1]$$

$$\text{dosazujeme } x = 2 \Rightarrow y = x + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \text{bod } [2; 3]$$

$$f_2: y = 3x + 1$$

$$\text{dosazujeme } x = 0 \Rightarrow y = 3x + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{bod } [0; 1]$$

$$\text{dosazujeme } x = 1 \Rightarrow y = 3x + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \Rightarrow \text{bod } [1; 4]$$

$$f_3: y = 0,5x + 1$$

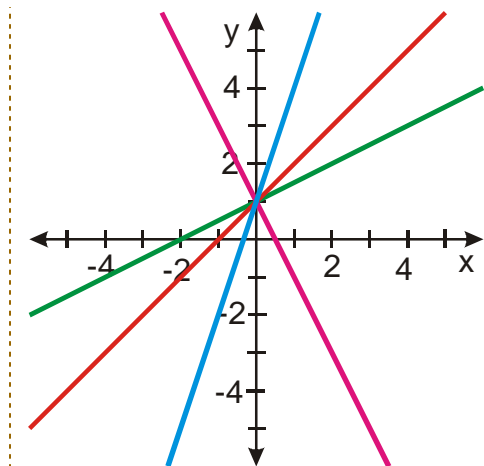
$$\text{dosazujeme } x = 0 \Rightarrow y = 0,5x + 1 = 0,5 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{bod } [0; 1]$$

$$\text{dosazujeme } x = 2 \Rightarrow y = 0,5x + 1 = 0,5 \cdot 2 + 1 = 2 \Rightarrow \text{bod } [2; 2]$$

$$f_4: y = -2x + 1$$

$$\text{dosazujeme } x = 0 \Rightarrow y = -2x + 1 = -2 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{bod } [0; 1]$$

$$\text{dosazujeme } x = 2 \Rightarrow y = -2x + 1 = -2 \cdot 2 + 1 = -3 \Rightarrow \text{bod } [2; -3]$$



Všechny grafy se s osou  $y$  protínají v bodě  $[0,1]$ , ale mají různý směr.  $\Rightarrow$  konstanta  $a$  neovlivňuje posunutí přímky, ale její směr.

$$f_2 : y = 3x + 1 \Rightarrow \text{velké } a, \text{ strmý graf}$$

$$f_4 : y = 0,5x + 1 \Rightarrow \text{malé } a, \text{ pozvolný graf}$$

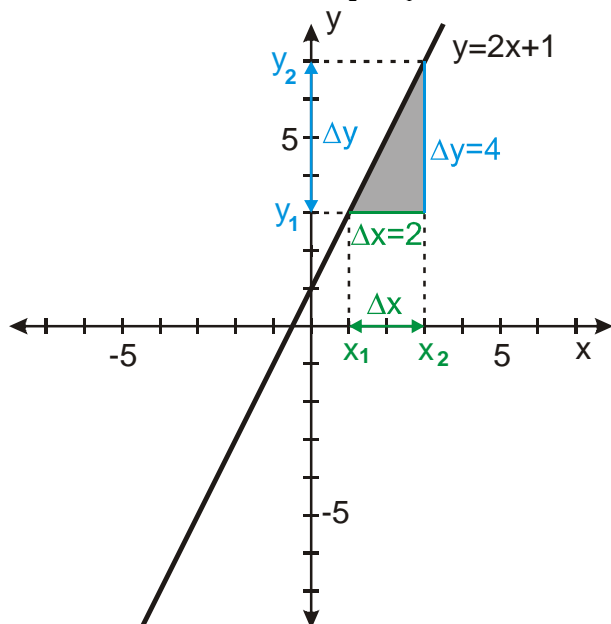
### Jak popisuje číslo $a$ sklon?

velký sklon = změni-li se  $x$  o málo pak se  $y$  zvětší o hodně.

Zkusíme na funkci  $y = 2x + 1$

$$\text{O kolik se zvětší } x: \Delta x = x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$$

$$\text{O kolik se zvětší } y: \Delta y = y_2 - y_1 = 7 - 3 = 4$$

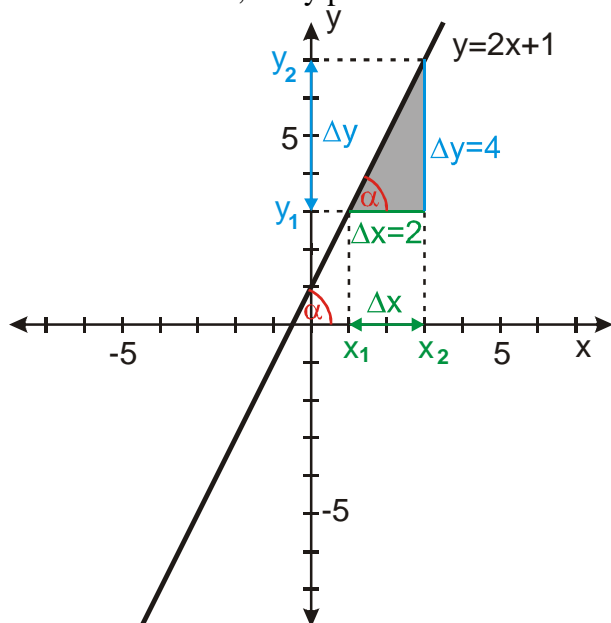


Kopec je strmý, když na dráze 3 m vylezeme o 2 m výš. Když vylezeme na dráze 1 km o 10 výš strmé to moc není.  $\Rightarrow$  strmost není velikost  $\Delta y$ , ale poměr  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$   $\Rightarrow$  spočteme ho:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2 \text{ - to je hodnota } a! \quad \Rightarrow \text{tedy } a = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$$\text{Jiný zápis } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Směr udává i úhel, který přímka svírá s osou  $x \Rightarrow$  i úhel by měl jít vyjádřit pomocí  $a$



Úhel můžeme v pravouhlém trojúhelníku vyjádřit pomocí goniometrických funkcí, nejlépe

$$\text{tangens } \text{tg} \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \Rightarrow a = \text{tg} \alpha$$

**Pedagogická poznámka:** Nechávám studenty, aby si sami zvolili jiná čísla  $x_1$  a  $x_2$  a ověřili si platnost předchozích výsledků.

Stejný typ grafu už známe z fyziky:

$$\text{rovnoměrný pohyb } s = vt + s_0 \Leftrightarrow y = ax + b.$$

Význam konstant je stejný:

- $a$  udává, jak rychle se mění  $y \Leftrightarrow v$  (rychlost) udává, jak rychle se mění dráha
- $b$  udává, průsečík s osou  $y \Leftrightarrow s_0$  udává, jak vysoko na ose  $s$  začíná graf dráhy

**Konstanta  $a$  určuje u grafu lineární funkce směr, konstanta  $b$  posunutí ve svislém směru.**

**Př. 3:** Na obrázku bez popsaných os jsou načrtnuty grafy funkcí:

a)  $y = -0,25x - 1$

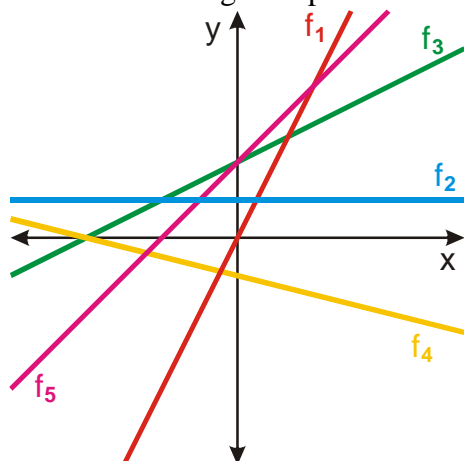
b)  $y = 1$

c)  $y = x + 2$

d)  $y = 2x$

e)  $y = 0,5x + 2$

Přiřaď každému grafu správnou funkci.



Správné přiřazení:

$f_1 : y = 2x$  - jediná přímá úměrnost, nejstrmější ze všech funkcí

$f_2 : y = 1$  - jediná konstantní funkce, protíná se s osou  $y$  níže než většina ostatních funkcí

$f_3 : y = 0,5x + 2$  - protíná se s osou  $y$  výše než konstantní funkce, má menší sklon

$f_4 : y = -0,25x - 1$  - protíná se s osou  $y$  v záporných číslech, jediná jde dolů

$f_5 : y = x + 2$  - protíná se s osou  $y$  výše než konstantní funkce, má větší sklon

**Př. 4:** Na obrázku bez popsaných os jsou načrtnuty grafy funkcí:

a)  $y = 0,2x$

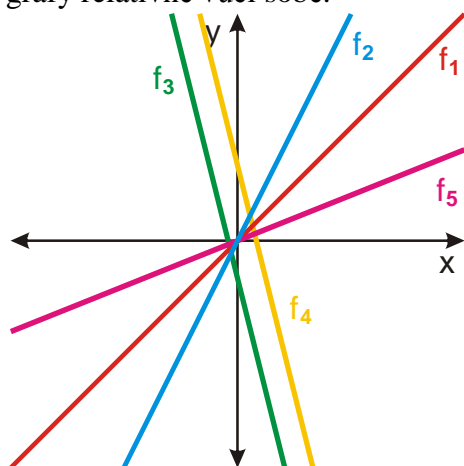
b)  $y = -2x + 2$

c)  $y = x$

d)  $y = 0,5x$

e)  $y = -2x - 1$

Přiřaď každému grafu správnou funkci. Upozornění: obrázek je zdeformován, sklony přímků neodpovídají sklonům přímků při normálním zobrazení. Je nutné posuzovat grafy relativně vůči sobě.



Správné přiřazení:

$f_1 : y = 0,5x$  - přímá úměrnost, středně velká strmost

$f_2 : y = x$  - přímá úměrnost, nejstrmější graf

$f_3 : y = -2x - 1$  - funkce směřuje dolů, protíná se s osou  $y$  v záporném čísle

$f_4 : y = -2x + 2$  - funkce směřuje dolů, protíná se s osou  $y$  v kladném čísle

$f_5 : y = 0,2x$  - přímá úměrnost, nejméně strmý graf

**Př. 5:** Načrtni (bez počítání a vynášení bodů) do jednoho obrázku bez popsání os (analogicky jako v předchozím příkladě) grafy těchto funkcí:

- a)  $f_1 : y = 3x - 1$                       b)  $f_2 : y = 3x + 2$                       c)  $f_3 : y = -2x$   
 d)  $f_4 : y = -x + 2$                       e)  $f_5 : y = -1$

a)  $f_1 : y = 3x - 1$

$a = 3 \Rightarrow$  strmý graf směřující doprava nahoru,  $b = -1 \Rightarrow$  s osou  $y$  se protíná pod počátkem

b)  $f_2 : y = 3x + 2$

$a = 3$   $b = 2 \Rightarrow$  graf rovnoběžný s grafem z bodu a) s osou  $y$  se protíná nad počátkem

c)  $f_3 : y = -2x$

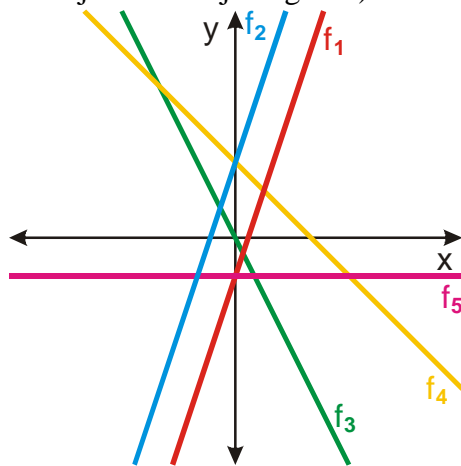
$a = -2 \Rightarrow$  strmý (ale méně než v bodech a) b)) graf směřující doprava dolů,  $b = 0 \Rightarrow$  prochází počátkem

d)  $f_4 : y = -x + 2$

$a = -1 \Rightarrow$  graf směřující doprava dolů (méně strmý než v bodě c)),  $b = 2 \Rightarrow$  s osou  $y$  se protíná nad počátkem ve stejném bodě jako graf z bodu b)

e)  $f_5 : y = -1$

$a = 0 \Rightarrow$  konstantní funkce, vodorovná přímka,  $b = -1 \Rightarrow$  s osou  $y$  se protíná pod počátkem ve stejném bodě jako graf a)



**Shrnutí:** Grafy lineární funkcí můžeme kreslit také podle hodnot jejich parametrů -  $a$  určuje strmost,  $b$  určuje průsečík s osou  $y$ .