

2.1.8 Lineární funkce I

Předpoklady: 2104, 2105

Př. 1: Celková kapacita přehradní nádrže Orlík je 780000000 m^3 . Na začátku povodní bylo v nádrži 500000000 m^3 . Každou sekundu přiteče do přehrady 4000 m^3 . Odtok z přehrady je $1000 \text{ m}^3/\text{s}$.

Spočti, kolik vody přibude do přehrady za 1s, 1 minutu, 1h.

Kolik vody bude v nádrži za 1 hod, 2 hod, 5 hod, 10 hod, 1den?

Najdi funkci, která udává závislost množství vody v přehradě (v milionech m^3) na čase udávaném hodinách. Urči její definiční obor a obor hodnot. Narýsuj graf této funkce.

Za jak dlouho bude přehrada plná?

Výpis známých veličin:

$$V_c = 780000000 \text{ m}^3 = 780 \text{ mil m}^3$$

$$V_0 = 500000000 \text{ m}^3 = 500 \text{ mil m}^3$$

$$\text{Přítok } P = 4000 \text{ m}^3$$

$$\text{Odtok } O = 1000 \text{ m}^3$$

Za 1s přibude 3000 m^3 .

Za 1 minutu přibude $60 \cdot 3000 = 180000 \text{ m}^3$.

Za 1 hodinu přibude $60 \cdot 60 \cdot 3000 = 10800000 \text{ m}^3 = 10,8 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za 1 hodinu $V = 500 + 1 \cdot 10,8 = 510,8 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za 2 hodiny $V = 500 + 2 \cdot 10,8 = 521,6 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za 5 hodin $V = 500 + 5 \cdot 10,8 = 554 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za t hodin $V = 500 + t \cdot 10,8 \text{ mil m}^3$.

další výsledky jsou v tabulce

čas [hodiny]	0	1	2	5	10	24
objem vody [mil m ³]	500	510,8	521,6	554	608	759,2

Funkce udávající závislost množství vody v přehradě na čase $V = 500 + t \cdot 10,8$.

Matematický zápis: $y = 10,8x + 500$

Přehrada bude plná až v ní bude 780 mil m^3 vody ($V = V_c$).

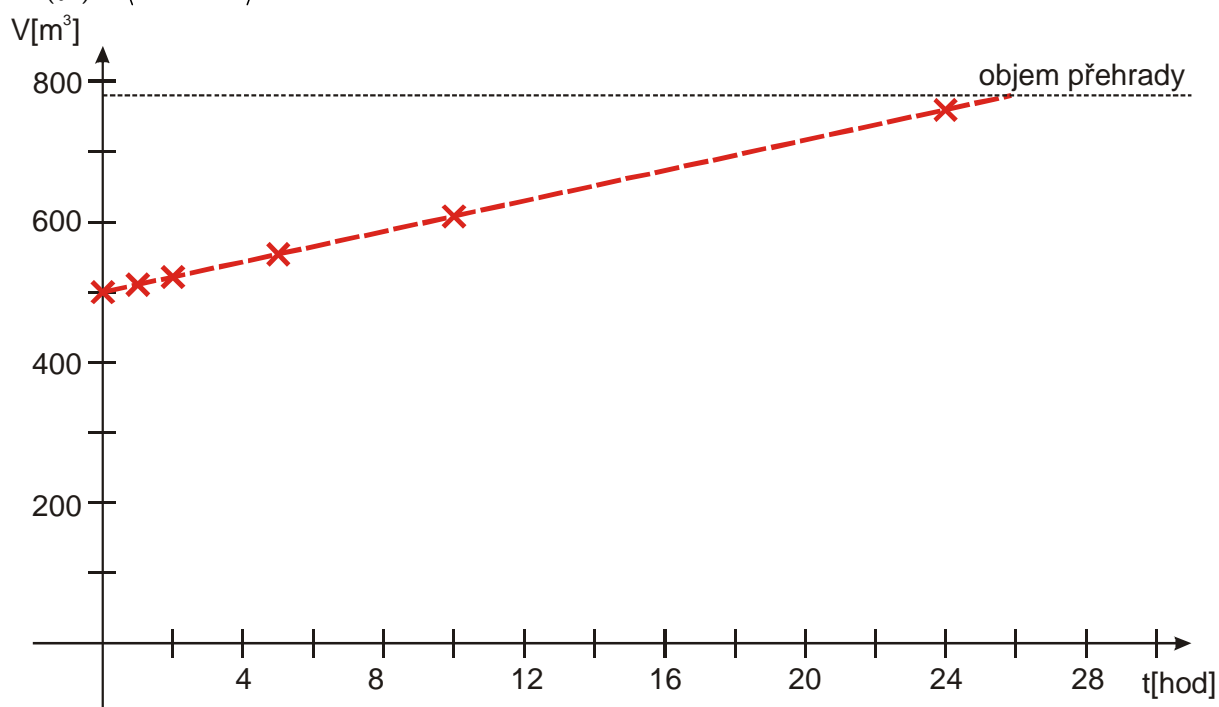
$$780 = 500 + t \cdot 10,8$$

$$10,8t = 780 - 500$$

$$t = \frac{280}{10,8} = 25,92 \text{ hod} \doteq 26 \text{ hod}$$

Tedy určíme $D(f) = \langle 0; 25,92 \rangle$ (jakmile přehrada přeteče, naše funkce přestane platit)

$$H(f) = \langle 500; 780 \rangle$$



Pedagogická poznámka: Studenti jsou schopni buď samostatně nebo s malou pomocí příklad postupně řešit. Spolupráce u tabuli je potřeba spíše jen u sestavování funkčního předpisu a určování definičního oboru a oboru hodnot.

Údaje jsou reálné. Podle povodí Vltavy kulminoval přítok do Orlické přehrady 13.8.2002 při hodnotě $4400 \text{ m}^3/\text{s}$. Maximální objem Orlické přehrady je potvrzen z více zdrojů, přesný objem vody v přehradě na začátku povodní jsem nenašel použil jsem údaj o normálním objemu nádrže.

Z příkladu je (na základě údajů poskytovaných Povodím Vltavy) vidět, že **v případě velkých povodní nemá Vltavská kaskáda jako ochranný prvek valný význam** (jak se zcela přesvědčivě ukázalo v srpnu 2002).

Někteří odborníci dokonce tvrdí, že situaci v Praze zhoršuje tím, že zatímco v minulosti povodňová vlna ze Šumavy dorazila do Prahy oproti Berounce se zpožděním (díky delšímu toku Vltavy a členitému korytu v místech, kde dnes stojí přehrady), v současnosti kulminují obě řeky téměř najednou a tím zhoršují stav pod svým soutokem.

V historii uchránila Vltavská kaskáda Prahu před povodní pouze jednou a to v roce xxxx, kdy povodňová vlna naplnila čerstvě postavenou Slapskou přehradu (za několik dní místo původně plánovaných několika měsíců).

Z předchozího vyplývá, že přehrady mohou chránit před velkou povodní pouze v případě, že nejsou napuštěny vůbec nebo málo. Ve skutečnosti je to u přehrad přesně obráceně, protože jejich součástí jsou také vodní elektrárny a množství vyrobené energie je přímo úměrné výšce hladiny (a tedy i napuštění přehrady). Správce přehrady je tím motivován k tomu, aby přehrada byla připravena zadržovat pouze minimální množství povodňové vody.

Nezbývá než opravit učebnice vlastivědy. Přehradní nádrže slouží:

- k výrobě elektřiny

- k rekreaci
- jako zdroj práce pro stavební firmy

Jako ochrana před povodní slouží přehrady pouze v případě, že povodeň není příliš vážná.

Neznám lepší ospravedlnění matematiky (a vzdělání vůbec) než podobné případy. V dnešní době, kdy už v podstatě neexistuje „stavovská čest“ a není problém sehnat úplatného „odborníka“, který bude ochoten veřejně tvrdit v podstatě cokoliv (snad nejkrásnějším příkladem je výstup hygienika najatého majitelem prodejen obviněných za prodej zkaženého masa. Podle denního tisku před soudem s vážnou tváří tvrdil, že zelené zbarvení zkaženého masa není na závadu, neboť po omytí a tepelné úpravě je možné jej bez obav konzumovat).

Svoboda informací není v těchto případech řešením, protože na většinu problémů je možné nalézt množství zcela protichůdných závěrů a zdůvodnění, prezentovaných zájmovými skupinami, které sledují v problematice své vlastní zájmy. Každý si nakonec musí z těchto informací vybrat sám, podle svého rozumu.

Až překvapivě mnoho takových situací je možné rozhodnout selským rozumem pomocí středoškolských znalostí (a často tak ušetřit peníze, námahu nebo zdraví).

Př. 2: Vyřeš předchozí příklad pro následující pozměněné situace:

- na začátku povodně je nádrž zcela prázdná
 - přítok do nádrže je pouze $2000 \text{ m}^3/\text{s}$.
 - přítok do nádrže je pouze $1000 \text{ m}^3/\text{s}$, odtok je $2000 \text{ m}^3/\text{s}$.
 - na začátku povodně bylo v přehradě 650 mil m^3
- Nakresli grafy všech případů do jednoho obrázku.

a) na začátku povodně je nádrž zcela prázdná

Za 1 hodinu přibude $60 \cdot 60 \cdot 3000 = 10800000 \text{ m}^3 = 10,8 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za 1 hodinu $V = 1 \cdot 10,8 = 10,8 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za t hodin $V = t \cdot 10,8 \text{ mil m}^3$.

čas [hodiny]	0	1	2	5	10	24
objem vody [mil m ³]	0	10,8	21,6	54	108	259,2

Zápis funkce: $y = 10,8x$

V grafu vyznačeno modře.

Přehrada bude plná až v ní bude 780 mil m^3 vody ($V = V_c$).

$$780 = t \cdot 10,8$$

$$t = \frac{780}{10,8} = 72,22 \text{ hod} \doteq 72 \text{ hod} \Rightarrow D(f) = \langle 0; 72,22 \rangle$$

$$H(f) = \langle 0; 780 \rangle$$

b) přítok do nádrže je pouze $2000 \text{ m}^3/\text{s}$.

Za 1 hodinu přibude $60 \cdot 60 \cdot (2000 - 1000) = 3600000 \text{ m}^3 = 3,6 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za 1 hodinu $V = 500 + 1 \cdot 3,6 = 503,6 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za t hodin $V = 500 + t \cdot 3,6 \text{ mil m}^3$.

čas [hodiny]	0	1	2	5	10	24
--------------	---	---	---	---	----	----

objem vody [mil m ³]	500	503,6	507,2	518	536	586,4
-----------------------------------	-----	-------	-------	-----	-----	-------

Zápis funkce: $y = 3,6x + 500$

V grafu vyznačeno zeleně.

Přehrada bude plná až v ní bude 780 mil m³ vody ($V = V_c$).

$$780 = 500 + t \cdot 3,6$$

$$t = \frac{280}{3,6} = 77,77 \text{ hod} \doteq 78 \text{ hod} \Rightarrow D(f) = \langle 0; 77,77 \rangle$$

$$H(f) = \langle 500; 780 \rangle$$

c) přítok do nádrže je pouze 1000 m³/s, odtok je 2000 m³/s.

Za 1 hodinu přibude $60 \cdot 60 \cdot (1000 - 2000) = -3600000 \text{ m}^3 = -3,6 \text{ mil m}^3$ (voda ubývá)

Objem vody v přehradě za 1 hodinu $V = 500 - 1 \cdot 3,6 = 496,4 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za t hodin $V = 500 - t \cdot 3,6 \text{ mil m}^3$.

čas [hodiny]	0	1	2	5	10	24
objem vody [mil m ³]	500	496,4	492,8	482	464	413,6

Zápis funkce: $y = -3,6x + 500$

V grafu vyznačeno žlutě.

Přehrada bude prázdná až v ní bude 0 m³ vody.

$$0 = 500 - t \cdot 3,6$$

$$t = \frac{500}{3,6} = 138,88 \text{ hod} \doteq 139 \text{ hod} \Rightarrow D(f) = \langle 0; 138,88 \rangle$$

$$H(f) = \langle 0; 500 \rangle$$

d) na začátku povodně bylo v přehradě 650 mil m³

Za 1 hodinu přibude $60 \cdot 60 \cdot 3000 = 10800000 \text{ m}^3 = 10,8 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za 1 hodinu $V = 650 + 1 \cdot 10,8 = 660,8 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za t hodin $V = 650 + t \cdot 10,8 \text{ mil m}^3$.

čas [hodiny]	0	1	2	5	10	24
objem vody [mil m ³]	650	660,8	671,6	704	758	

Zápis funkce: $y = 650 + 10,8x$

V grafu je vyznačeno fialově.

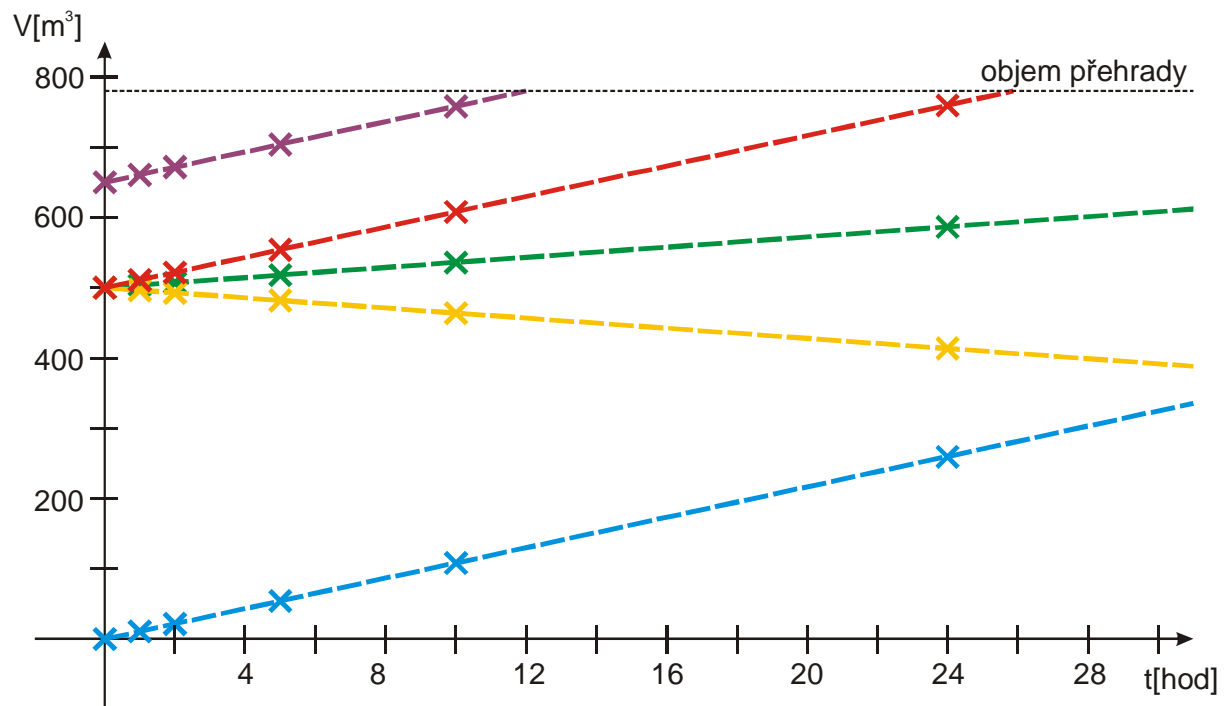
Přehrada bude plná až v ní bude 780 mil m³ vody ($V = V_c$).

$$780 = 650 + t \cdot 10,8$$

$$t = \frac{130}{10,8} = 12,04 \text{ hod} \doteq 12 \text{ hod} \Rightarrow D(f) = \langle 0; 12,04 \rangle$$

$$H(f) = \langle 650; 780 \rangle$$

Od 12. hodiny výsledný objem přesahuje objem přehrady a nemá tudíž smysl počítat podle funkce objem vody v přehradě.



Pedagogická poznámka: Spočítat celý příklad 2 o hodině většinou nestihne nikdo. Nechávám studenty, aby si příklad dobrovolně dopočítali doma (ty co to udělají, odměním plusem) a kontrolu provádíme na začátku příští hodiny. Rozbor grafů je prvním příkladem příští hodiny.

Shrnutí: Matematika může být užitečná, když si chceme udělat na něco svůj názor.