2.1.3 Zobrazení

Předpoklady: 2102

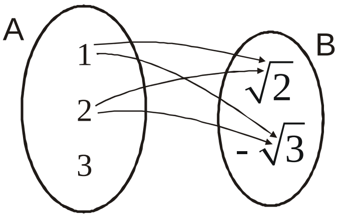
Př. 1: Jsou dány množiny $A=\{1,2,3\}$, $B=\{\sqrt{2},-\sqrt{3}\}$. Urči relace

a) $R_1=\{[x,y]\in A\times B, x\le 2\}$ b) $R_2=\{[x,y]\in A\times B, y\ge 0\}$

Relace zobraz i graficky. Příklad řeš do dvou sloupců.

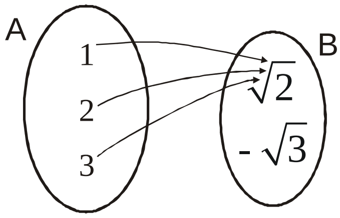
$R_1=\{[x,y]\in A\times B, x\le 2\}$

$R_1=\{[2,\sqrt{2}],[1,\sqrt{2}],[2,-\sqrt{3}],[1,-\sqrt{3}]\}$



$R_2=\{[x,y]\in A\times B, y\ge 0\}$

$R_2=\{,[1,\sqrt{2}],[2,\sqrt{2}],[3,\sqrt{2}]\}$



Speciální vlastnost:
z každého prvku A **vede maximálně jedna šipka.** Takové relaci se říká **zobrazení.**

Definice:
Jsou dány množiny *A*, *B*. Zobrazení *Z* z A do B je taková relace, ve které ke každému $x\in A$ existuje nejvýše jedno $y\in B$ takové, že uspořádána dvojice $[x,y]$ je prvkem této relace.

Jinak:
podle obrázku: od každého *x* vede maximálně jedna šipka (u *y* se ale více šipek scházet může), pak je jasné, kam se od každého *x* dostaneme

Proč je to důležité?
Když je relace zobrazením je jednoznačně dané, kam se z každého *x* dostaneme (co k němu patří) – **zobrazení je pak jednoznačný předpis, jak se odněkud někam dostat (máme jistotu, že každý, kdo dodrží pokyny, se dostane tam, kam jsme mysleli)**.

Zobrazení je speciální případ relace. Podobně existují speciální typy zobrazení.

Prosté zobrazení:
Zobrazení *Z* z *A* do *B* se nazývá prosté právě, když pro každé dvě uspořádané dvojice $[x_1,y_1]\in Z$ a $[x_2,y_2]\in Z$ platí: je-li $x_1\ne x_2$ pak i $y_1\ne y_2$.

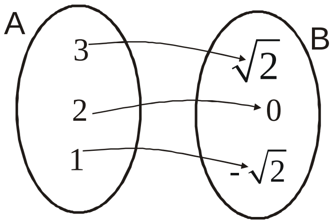
Co to znamená? Zkusíme to příkladem.

Př. 2: Jsou dána dvě zobrazení Z_1, Z_2 množin $A = \{1,2,3\}$, $B = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$:

$Z_1 = \{[1, -\sqrt{2}], [2,0], [3, \sqrt{2}]\}$ a $Z_2 = \{[1, \sqrt{2}], [2, \sqrt{2}], [3, \sqrt{2}]\}$.

Znázorni obě relace graficky a pomocí definice rozhodni, zda jsou prosté. Příklad řeš do dvou sloupců pod zadání.

$Z_1 = \{[1, -\sqrt{2}], [2,0], [3, \sqrt{2}]\}$



Zkoušíme definici:

1. Vybereme dvojice $[1, -\sqrt{2}]$ a $[2,0]$

$x_1 = 1 \neq 2 = x_2$ mělo by platit i $y_1 \neq y_2$

platí protože $y_1 = -\sqrt{2} \neq 0 = y_2$

2. Vybereme dvojice $[1, -\sqrt{2}]$ a $[3, \sqrt{2}]$

$x_1 = 1 \neq 3 = x_2$ mělo by platit i $y_1 \neq y_2$

platí protože $y_1 = -\sqrt{2} \neq \sqrt{2} = y_2$

3. Vybereme dvojice $[1, -\sqrt{2}]$ a $[1, -\sqrt{2}]$

$x_1 = 1 = 1 = x_2$ dál nezkoušíme, na stejná x_1 a x_2 není žádný požadavek

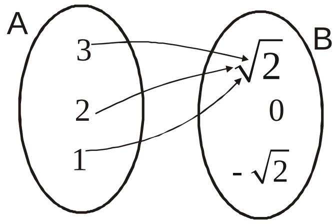
4. Vybereme dvojice $[2,0]$ a $[3, \sqrt{2}]$

$x_1 = 2 \neq 3 = x_2$ mělo by platit i $y_1 \neq y_2$

platí protože $y_1 = 0 \neq \sqrt{2} = y_2$

Žádné dvě další dvojice v zobrazení nenajdeme. Požadavek je splněn, zobrazení je prosté.

$Z_2 = \{[1, \sqrt{2}], [2, \sqrt{2}], [3, \sqrt{2}]\}$



Zkoušíme definici:

1. Vybereme dvojice $[1, \sqrt{2}]$ a $[2, \sqrt{2}]$

$x_1 = 1 \neq 2 = x_2$ mělo by platit i $y_1 \neq y_2$

neplatí protože $y_1 = \sqrt{2} = \sqrt{2} = y_2$

Zobrazení není prosté, podmínku měly splňovat všechny dvojice, našli jsme jednu, která podmínku nesplňuje, další nemá cenu zkoušet.

To je strašně pracné. Jak to rozlišíme graficky?

Ke každému prvku v B vede maximálně jedna šipka.

Existuje prvek v B, u kterého se schází více šipek

Pedagogická poznámka: Studenti většinou určí prostou funkci intuitivně, část z nich dokonce dokáže svou volbu vysvětlit, ale přesný postup dokazování podle definice je nad jejich síly. Píšu ho na tabuli, netrvám na přepisování do sešitu, jde jen o to, aby viděli, co znamená doslovné dokazování podle podobné definice.

Zobrazení je prosté právě když:

- k různým *x* náleží různá *y*

- žádný prvek y nenáleží k různým prvkům x (u žádného prvku B nesmí končit 2 šipky)

Jakou výhodu má prosté zobrazení?
Můžeme obrátit směr šipek a získáme opět zobrazení (tentokrát z *B* do *A*)

Vzájemně jednoznačné zobrazení
Zobrazení Z z A do B se nazývá vzájemně jednoznačné,právě když je prosté a pro každé $x_1 \in A$ existuje $[x_1, y_1] \in Z$ a pro každé $y_2 \in B$ existuje $[x_2, y_2] \in Z$.

Př. 3: Zformuluj pravidlo, které musí splňovat grafické znázornění vzájemně jednoznačného zobrazení.

Každý prvek z *A* má svoji dvojici, každý prvek z *B* také. Z každého prvku z *A* povede právě jedna šipka, u každého prvku z *B* bude právě jedna šipka končit.

Př. 4: Rozhodni, zda jsou zobrazení Z_1, Z_2 z příkladu 2 vzájemně jednoznačná.

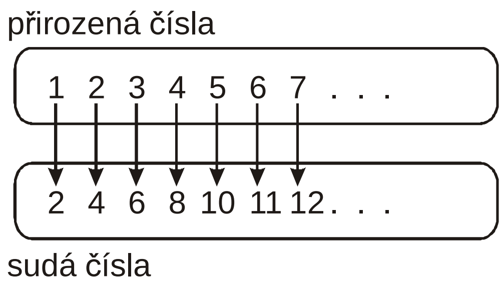
Z_1 je vzájemně jednoznačné, Z_2 není (není prosté a navíc nevyužívá všechny prvky množiny *B*).

Př. 5: Sestroj libovolné vzájemně jednoznačné zobrazení množin $C = \{1, 20, 100\}$, $D = \{\ 0, \pi\}$

Není možné sestrojit vzájemně jednoznačné zobrazení množin *C* a *D*. Podmínku pro vzájemně jednoznačné zobrazení (z každého prvku z *C* povede právě jedna šipka, u každého prvku z *D* bude právě jedna šipka končit) zle splnit pouze v případě, že obě množiny mají stejný počet prvků.

$\Rightarrow$ Vzájemně jednoznačné zobrazení slouží k porovnávání množin.

Pomocí vzájemně jednoznačného zobrazení se přesvědčíme, že přirozených čísel a sudých přirozených čísel je stejně.



Př. 6: Vymysli vzájemně jednoznačné zobrazení studentů ve třídě.

Nejčastějším případem je zobrazení, které každému studentovi přiřazuje jeho souseda v lavici. Do množiny studentů pak musíme zahrnout pouze ty studenty, kteří nesedí sami.
Lepší variantou je zobrazení, které každému studentovi přiřazuje studenta, který je v abecedě za ním a poslednímu studentovi přiřazuje prvního. Toto zobrazení samozřejmě můžeme uplatnit na všechny studenty ve třídě.

Shrnutí: