

2.1.2 Kartézský součin

Předpoklady:

Co znamená záhadný nadpis, nám řekne definice:

Kartézský součin množin A, B :

Jsou dány množiny A, B . Kartézský součin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B$.

Tím víme všechno potřebné a začneme řešit příklady.

Př. 1: Jsou dány množiny $A = \{a; b\}$, $B = \{0; 1; \pi\}$.

a) Sestroj kartézský součin $A \times B$.

b) Sestroj kartézský součin $A \times A$.

a) kartézský součin $A \times B$.

Jde o analýzu textu, tedy čtení. Postupuji podle definice:

Kartézský součin $A \times B$ je množina $\Rightarrow A \times B = \{ \}$

ted' musíme najít prvky:

množina uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B \Rightarrow$ sestavujeme dvojice $[\quad , \quad]$

- první je něco z $A \Rightarrow [a, \quad]$
- druhé něco z $B \Rightarrow [a, 0]$

Máme sestavit všechny dvojice $\Rightarrow A \times B = \{[a, 0], [a, 1], [a, \pi], [b, 0], [b, 1], [b, \pi]\}$

b) kartézský součin $A \times A$.

Stejně jako předtím, ale i na druhé místo vybíráme z A .

$A \times A = \{[a, a], [a, b], [b, a], [b, b]\}$

Poznámka: Při sestavování dvojice je dobré postupovat systematicky, abychom na něco nezapomněli.

Pedagogická poznámka: Hodně studentů bude chtít definici na příkladě vysvětlit. Vysvětlení se jim samozřejmě dostane, ale nejdřív je nutné, aby sami zkusili text rozebrat a najít odpověď. I špatný pokus má cenu, protože se z něj dá usoudit na to, co špatně přečetli nebo špatně pochopili. Navíc zkušenosti ukazují, že většina těch, kteří to nakonec zkusí, vyřeší příklad i bez vysvětlování správně (největším problémem je většinou právě „pokoušení se“).

Př. 2: Je dán kartézský součin $C \times D = \{[1, 2], [1, 3], [0, 2], [0, 3]\}$. Urči množiny C, D .

Množinu C tvoří všechna čísla, která jsou v kartézském součinu na prvním místě, množinu D ta na druhém $\Rightarrow C = \{1, 0\}$, $D = \{2, 3\}$.

Př. 3: Je dána množina $M = \{[1,1],[1,2],[3,2]\}$. Je tato množina kartézským součinem $E \times F$ množin E, F ?

Množina není kartézským součinem. Prvek 1 se vyskytuje ve dvou uspořádaných dvojicích. Druhá množina tedy musí obsahovat minimálně dva prvky, ale prvek 3 z první množiny se v množině M vyskytuje pouze v jedné uspořádané dvojici.

Př. 4: Dopln množinu M z předchozího příkladu co nejmenším počtem prvků tak, aby doplněná množina byla kartézským součinem $E \times F$ množin E, F .

V množině chybí druhá uspořádaná dvojice prvku 3 - $[3,1]$.

$$E = \{1,0\}, F = \{2,3\}$$

Př. 5: Množina G má pět prvků, množina H má 10 prvků. Kolik prvků má kartézský součin množin $G \times H$?

Ke každému prvku z G musíme vytvořit dvojice se všemi prvky z H , tedy 10 dvojic ke každému prvku z G , dohromady $5 \cdot 10 = 50$ dvojic.

Pedagogická poznámka: Následující definici by měli studenti sestavit sami. Pomozte jim pouze s tím, že si mají procházet definici kartézského součinu $A \times B$ a měnit text dle potřeby. Při kontrole je pak lepší sestavit definici na tabuli dynamicky než ji jen promítnout na zeď.

Př. 6: Sestav definici kartézského součinu tří množin A_1, A_2, A_3 .

Bereme původní definici a měníme části, které jsou přímo navázány na dvojici množin A, B . Kartézský součin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B$.

Kartézský součin $A_1 \times A_2 \times A_3$ je množina všech uspořádaných trojic $[x, y, z]$, kde $x \in A_1, y \in A_2, z \in A_3$.

Trojice musíme sestavovat proto, abychom měli místo pro prvky ze třetí množiny A_3 (obě místa v působní dvojici byla obsazená).

Kartézský součin množin A_1, A_2, A_3 :

Jsou dány množiny A_1, A_2, A_3 . Kartézský součin $A_1 \times A_2 \times A_3$ je množina všech uspořádaných trojic $[x, y, z]$, kde $x \in A_1, y \in A_2, z \in A_3$.

Př. 7: Jsou dány množiny: $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$, $A_3 = \{\sqrt{2}, \sqrt{6}\}$. Urči počet prvků kartézského součinu $A_1 \times A_2 \times A_3$. Urči kartézský součin $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Všechny tři množiny mají po dvou prvcích \Rightarrow 2 možnosti na první místo v trojici, dvě možnosti na druhé místo, ke každému na prvním místě a 2 možnosti na třetí místo, ke každé kombinaci na prvních dvou místech \Rightarrow tedy $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností.

$$A_1 \times A_2 \times A_3 =$$

$$\left\{ \left[1, \frac{1}{2}, \sqrt{2} \right], \left[1, \frac{3}{4}, \sqrt{6} \right], \left[1, \frac{3}{4}, \sqrt{2} \right], \left[1, \frac{1}{2}, \sqrt{6} \right], \left[2, \frac{1}{2}, \sqrt{2} \right], \left[2, \frac{3}{4}, \sqrt{6} \right], \left[2, \frac{1}{2}, \sqrt{6} \right], \left[2, \frac{3}{4}, \sqrt{2} \right] \right\}$$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají tendenci přeskočit příklad 6 a řešit rovnou příklad 7 (zdá se jim konkrétnější). Často neuspějí, proto řešení příkladu sedm povolují pouze těm, kteří už mají zkontrolovanou šestku.

Př. 8: Sestav definici kartézského součinu n množin A_1, A_2, \dots, A_n .

Bereme původní definici a měníme části, které jsou přímo navázány na dvojici množin A, B .

Kartézský součin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B$.

Kartézský součin $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ je množina všech uspořádaných n -tic $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, kde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$.

Kartézský součin n množin:

Jsou dány množiny A_1, A_2, \dots, A_n . Kartézský součin $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ je množina všech uspořádaných n -tic $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, kde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$.

Pedagogická poznámka: V definici kartézského součinu by bylo správnější psát „trojic $[a_1, a_2, a_3]$ “, ale studenti většinou píšou definici tak, jak je uvedeno výše. Nechávám to tak a neupozorňuji na to, aby měli co řešit v příkladu 8. Diskuse o tom proč není možné psát n -tic $[x, y, \dots, n]$ jsou určitě zajímavé.

Existují i kartézské součiny nekonečných množin, která pak nejdu zapsat výpisem. Například kartézský součin $R \times R$ zobrazujeme jako rovinu (souřadnice bodů jsou uspořádané dvojice dvou reálných čísel)

Shrnutí: Kartézský součin je množinou všech uspořádaných n -tic sestavených z prvků množin součinu.