1.8.4 Násobení a dělení lomených výrazů

Předpoklady: 1802, 1803

Násobení

Př. 1: Vypočti: $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$

Stejně násobíme lomené výrazy (mnohočleny, které je tvoří jsou koneckonců jenom čísla)

Př. 2: Doplň větu: „Pro libovolné výrazy $V_1;V_2;V_3;V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0;V_4 \neq 0$ platí: $\frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{V_3}{V_4}=\ldots$“.

Pro libovolné výrazy $V_1;V_2;V_3;V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0;V_4 \neq 0$ platí: $\frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{V_3}{V_4}=\frac{V_1\cdot V_3}{V_2\cdot V_4}$.

Výrazy neroznásobujeme, ale snažíme se je co nejvíce pokrátit (někdy se musí i rozkládat).

Př. 3: Urči součin:

a) $\frac{5x^2}{2y^3}\cdot\frac{4y^2}{15x}$ b) $\frac{3y-6}{3x}\cdot\frac{6x^2}{5y-10}$ c) $\frac{x^2-1}{x^2+xy}\cdot\frac{x^2+2xy+y^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x^2+x}{yx-y}$

d) $\left(1-\frac{a}{1+a}\right)\cdot\frac{1-a^2}{1-b}\cdot\frac{1-b^2}{a^2-a}$ e) $(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)$

a) $x \neq 0; y \neq 0$

$$\frac{5x^2}{2y^3}\cdot\frac{4y^2}{15x}=\frac{5x^2}{2y^3}\cdot\frac{2\cdot 2y^2}{5\cdot 3x}=\frac{2x}{3y}$$

b) $x \neq 0$, $5y-10 \neq 0 \Rightarrow 5y \neq 10 \Rightarrow y \neq 2$

$$\frac{3y-6}{3x}\cdot\frac{6x^2}{10y-20}=\frac{3(y-2)}{3x}\cdot\frac{3\cdot 2\cdot x^2}{5(y-2)}=\frac{3\cdot 2\cdot x}{5}=\frac{6}{5}x$$

c) $x^2+xy \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -xy$; $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$; $yx-y \neq 0 \Rightarrow yx \neq y$

$$\frac{x^2-1}{x^2+xy}\cdot\frac{x^2+2xy+y^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x^2+x}{yx-y}=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x+y)}\cdot\frac{(x+y)^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x(x+1)}{y(x-1)}=\frac{x+y}{y}$$

d) $1+a\neq 0 \Rightarrow a\neq -1$; $1-b\neq 0 \Rightarrow b\neq 1$; $a^2-a\neq 0 \Rightarrow a^2\neq a$

první závorku musíme upravit na zlomek, u kterého je jasné co je čitatel a co jmenovatel, než začneme násobit a krátit

$$\left(1-\frac{a}{1+a}\right)\cdot\frac{1-a^2}{1-b}\cdot\frac{1-b^2}{a^2-a}=\left(\frac{1+a}{1+a}-\frac{a}{1+a}\right)\cdot\frac{(1-a)(1+a)}{1-b}\cdot\frac{(1-b)(1+b)}{a(a-1)}=$$

$$=\frac{1}{1+a}\cdot\frac{-(a-1)(1+a)}{a}\cdot\frac{(1+b)}{(a-1)}=-\frac{1+b}{a}$$

e) $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$; $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$

$$\left(x^2-1\right)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)=(x-1)(x+1)\cdot\left(\frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right)=$$

$$(x-1)(x+1)\frac{(x+1)-(x-1)-\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x+1)}=(x+1)-(x-1)-\left(x^2-1\right)=3-x^2$$

Pedagogická poznámka: I přes upozornění se určitě najde někdo, kdo místo krácení začne roznásobovat. S takovým je třeba osobně promluvit a ukázat mu, že je to doopravdy nesmysl.

V bodě d) je potřeba dát pozor, aby studenti před násobením a likvidací zlomků připočetli do zlomku, někteří také zapomenou před krácením výrazů $a-1$ vytknout mínus.

V bodě e) je nejvíce chyb kvůli mínusům před zlomky.

Umocňování

Př. 4: Doplň větu: „Pro libovolné výrazy $V_1;V_2$ a pro libovolné přirozené číslo k a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2\neq 0$ platí: $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k=\ldots$“.

umocňování zlomků $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}\Rightarrow$ stejně u lomených výrazů (jsou to jen čísla)

Pro libovolné výrazy $V_1;V_2$ a pro libovolné přirozené číslo k a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2\neq 0$ platí: $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k=\frac{V_1^k}{V_2^k}$.

Př. 5: Uprav lomený výraz $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\left(\frac{y}{x-1}\right)^2\left(\frac{x^2-1}{2xy}\right)^2$.

$x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$; $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$; $x\neq 0$; $y\neq 0$

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\left(\frac{y}{x-1}\right)^2\left(\frac{x^2-1}{2xy}\right)^2=\frac{x^2}{(x+1)^2}\frac{y^2}{(x-1)^2}\left[\frac{(x-1)(x+1)}{2xy}\right]^2=$$

$$=\frac{x^2}{(x+1)^2}\frac{y^2}{(x-1)^2}\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{2^2x^2y^2}=\frac{1}{4}$$

Pedagogická poznámka: Těm, kteří mají problémy s rozkladem výrazu $(x^2-1)^2$ radím, aby si vnější mocninu napsali jako součin.

Př. 6: Podobně jako v minulé kapitole pomocí analogie s výpočty se zlomky doplň větu: „Pro libovolné výrazy $V_1;V_2;V_3;V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2\neq 0;V_3\neq 0;V_4\neq 0$ platí: $\frac{V_1}{V_2}:\frac{V_3}{V_4}=$.

Dělení zlomků $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{5}{6}$ $\Rightarrow$ stejně u lomených výrazů (jsou to jen čísla)

Pro libovolné výrazy $V_1;V_2;V_3;V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2\neq 0;V_3\neq 0;V_4\neq 0$ platí: $\frac{V_1}{V_2}:\frac{V_3}{V_4}=\frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{V_4}{V_3}=\frac{V_1\cdot V_4}{V_2\cdot V_3}$.

Výrazy neroznásobujeme, ale snažíme se je co nejvíce pokrátit (někdy se musí i rozkládat).

Proč se zlomek při dělení obrací?

platí: $:2=\cdot\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ stejně u výrazů $:V=\cdot\frac{1}{V}$

Počítám: $\frac{V_1}{V_2}:\frac{V_3}{V_4}=\frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{1}{\frac{V_3}{V_4}}=\frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{1}{\frac{V_3}{V_4}}\cdot\underbrace{\frac{V_4}{V_4}}_{\cdot 1}=\frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{V_4}{\frac{V_3V_4}{V_4}}=\frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{V_4}{V_3}=\frac{V_1V_4}{V_2V_3}$

Př. 7: Urči podíly:

a) $\frac{2x^2}{3y}:\frac{4x^2}{15y^2}$ b) $\frac{12a^2b^2}{14x^2y^3}:\frac{18a^2b}{x^3y^2}$ c) $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}:\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$

d) $\frac{x^3-x^2y}{y+y^2}:\frac{y^3-y^2x}{xy+x}$ e) $\left(v+\frac{u-v}{1+uv}\right):\left[1-\frac{v(u-v)}{1+uv}\right]$

a) podmínky: $y\neq 0$; $x\neq 0$ (čitatel zlomku, kterým dělím, také nesmí být nula)

$$\frac{2x^2}{3y}:\frac{4x^2}{15y^2}=\frac{2x^2}{3y}\cdot\frac{15y^2}{4x^2}=\frac{2x^2}{3y}\cdot\frac{3\cdot 5y^2}{2\cdot 2x^2}=\frac{5}{2}y$$

b) podmínky: $x \neq 0$; $y \neq 0$; $a \neq 0$; $b \neq 0$ (čitatel zlomku, kterým dělím, také nesmí být nula)

$$\frac{12a^2b^2}{14x^2y^3} : \frac{18a^2b}{21x^3y^2} = \frac{12a^2b^2}{14x^2y^3} \cdot \frac{21x^3y^2}{18a^2b} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b}{2 \cdot 7y} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdot x}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{bx}{y}$$

c) podmínky: $a^2 \neq b^2$; $a \neq b$ (čitatel zlomku, kterým dělím, také nesmí být nula)

$$\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} : \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{(a-b)(a-b)}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

d) podmínky: $y \neq y^2$; $xy \neq -x$; $y^3 \neq y^2x$ (čitatel zlomku, kterým dělím, také nesmí být nula)

$$\frac{x^3-x^2y}{y+y^2} : \frac{y^3-y^2x}{xy+x} = \frac{x^3-x^2y}{y+y^2} \cdot \frac{xy+x}{y^3-y^2x} = \frac{x^2(x-y)}{y(1+y)} \cdot \frac{x(y+1)}{y^2(y-x)} = \frac{x^3}{y^3} \cdot \frac{(x-y)}{-(x-y)} = -\frac{x^3}{y^3}$$

e) podmínky: $uv \neq -1$, další určím později, nevím ještě jaký je například čitatel druhého zlomku

$$\left(v + \frac{u-v}{1+uv}\right) : \left[1 - \frac{v(u-v)}{1+uv}\right] = \left(\frac{v(1+uv)+(u-v)}{1+uv}\right) : \left[\frac{1+uv-v(u-v)}{1+uv}\right] =$$

$$\frac{v+uv^2+u-v}{1+uv} : \frac{1+uv-vu+v^2}{1+uv} = \frac{uv^2+u}{1+uv} : \frac{1+v^2}{1+uv} = \frac{u(v^2+1)}{1+uv} \cdot \frac{1+uv}{1+v^2} = u$$

podmínky: čitatel druhého zlomku je $1+v^2$ a je vždy různý od nuly

$\Rightarrow$ podmínky je často vhodnější určovat až po upravení výrazu (nesmíme, ale zapomenout na výrazy, které se při upravování vykrátí

Př. 8: Sbírka příklad 7.
Sbírka příklad 8.

Shrnutí: Při násobení a dělení lomených výrazů používáme analogické postupy jako u zlomků.