1.8.2 Sčítání a odčítání lomených výrazů I

Předpoklady: 1801

Pedagogická poznámka: V učebnici je sčítání uvedeno v jedné kapitole s násobením. Původně jsem měl také pocit, že bude stačit pět příkladů, ale tahle hodina se stala jednou z mála, při kterých se 4B2011 rozsypala – většina studentů příklady zvládla, ale více než třetina měla vážné problémy. Proto jsem se rozhodl zpomalit postup, nechat na sčítání víc času a nácvik sčítání více rozdrobit do většího množství příkladů, po průchodu s 8O2013 jsem dokonce hodinu rozdělil na dvě části s tím, že do první jsem ještě přidal rozšiřování lomených výrazů z minulé hodiny.

Pedagogická poznámka: S částí hodiny, která se zabývá rozšiřováním nejsem moc spokojený, ale zatím jsem nenašel lepší řešení. Snažím se ji věnovat maximálně dvacet minut, aby zbylo dost času na první příklady se sčítáním.

rozšiřování (teoreticky probráno v minulé hodině) je potřeba hlavně při sčítání lomených výrazů

Př. 1: Rozšiř lomené výrazy $\frac{1}{2x}$; $\frac{x}{x+2}$ a $\frac{3}{2x-4}$ tak, aby jejich jmenovatele byly shodné.

Musíme najít společný násobek mnohočlenů ve jmenovatelích.

$2x = 2\cdot x$

$x+2$

$2x-4 = 2(x-2)$

nejjednodušší společný násobek je $2\cdot x\cdot(x+2)\cdot(x-2)$, teď rozšiřujeme každý zlomek tím, co mu ve jmenovateli chybí do nejjednoduššího společného násobku

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-4}{2x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x}{x+2}\cdot\frac{2x(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{2x^2(x-2)}{2x(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{3}{2x-4} = \frac{3}{2(x-2)}\cdot\frac{x(x+2)}{x(x+2)} = \frac{3x(x+2)}{2x(x-2)(x+2)}$$

po rozšíření, necháváme čitatel i jmenovatel v součinovém tvaru, roznásobení závorek přijde na řadu až v případě nutné potřeby

Př. 2: Rozšiř lomený výraz $\frac{x-1}{2-x}$ tak, aby v jeho jmenovateli byl mnohočlen x^2-4

Dvě možnosti

1) úsporně

z čeho je x^2-4? $x^2-4=(x-2)(x+2) \Rightarrow$ $x-2$ mám se špatným znaménkem $\Rightarrow$ rozšířím -1 a pak $x+2$

$$\frac{x-1}{2-x}=\frac{(x-1)}{(2-x)}\cdot\frac{-1}{-1}=\frac{1-x}{x-2}\cdot\frac{x+2}{x+2}=\frac{2-x-x^2}{x^2-4}$$

2) tupě

nestarám se jestli tam už něco je, rozšířím x^2-4 a pak se snažím krátit

$$\frac{x-1}{2-x}=\frac{x-1}{2-x}\frac{x^2-4}{x^2-4}=\frac{(x-1)}{(x^2-4)}\frac{(x-2)(x+2)}{2-x}=\frac{(x-1)(x+2)}{-(x^2-4)}=\frac{2-x-x^2}{x^2-4}$$

zkrácení se nemusí podařit vždy!!!

Př. 3: Rozšiř lomený výraz $\frac{1}{x+3}$ tak, aby v jeho jmenovateli byl mnohočlen x^2-4

$x^2-4=(x-2)(x+2) \Rightarrow$ neobsahuje mnohočlen $x+3$, kterého se ale nejde zbavit krácením (jmenovatel je 1)

Příklad nejde vyřešit

Př. 4: Rozšiř lomené výrazy tak, aby v se v jejich jmenovateli vyskytoval výraz v závorce:

a) $\frac{x-1}{x+2}$ $\{x^2+2x\}$

b) $\frac{x-2}{1-x}$ $\{(x-1)\}$

c) $\frac{x-1}{x^2-1}$ $\{(x+1)^2\}$

d) $\frac{x^2-9}{x^2-3x-18}$ $\{x^2-36\}$

a) $x^2+2x=x(x+2)$

$$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x}{x}=\frac{x^2-x}{x^2+2x}$$

b) $\frac{x-2}{1-x}$ - ve jmenovateli potřebuji opačné znamínko

$$\frac{x-2}{1-x}\cdot\frac{(-1)}{(-1)}=\frac{2-x}{x-1}$$

c) $\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+1}=\frac{x+1}{(x+1)^2}$

d) $x^2-36=(x-6)(x+6)$

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x-18}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-6)(x+3)}=\frac{x-3}{x-6}\cdot\frac{x+6}{x+6}=\frac{x^2+3x-18}{x^2-36}$$

Př. 5: Sbírka příklad 2.

Př. 6: Vypočti: $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$

$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}$ - musím převést na společného jmenovatele.

Stejně sčítáme lomené výrazy (mnohočleny, které je tvoří jsou koneckonců jenom čísla)

Př. 7: Doplň větu: „Pro libovolné výrazy $V_1;V_2;V_3;V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2\neq 0;V_4\neq 0$ platí: $\frac{V_1}{V_2}+\frac{V_3}{V_4}=\ldots$“.

Pro libovolné výrazy $V_1;V_2;V_3;V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2\neq 0;V_4\neq 0$ platí: $\frac{V_1}{V_2}+\frac{V_3}{V_4}=\frac{V_1V_4+V_3V_2}{V_2V_4}$.

Společný jmenovatel chceme co nejjednodušší, při výpočtu se nechává kvůli krácení v součinovém tvaru.

Pedagogická poznámka: Na první pohled jsou předchozí příklady naprosto zbytečné. Jejich cílem je:
a) naučit studenty, že obecná a abstraktní tvrzení je možné odvodit (nebo si třeba sám sobě objasnit) pomocí konkrétních čísel
b) dotlačit je k tomu, aby obecnou větu vůbec vzali na vědomí. Většinou si ji sice napíšou, třeba se ji i naučí, ale vodítko na příklady čekají od konkrétního příkladu.

Př. 8: Sečti lomené výrazy:

a) $\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+4$

b) $\frac{3}{x}+\frac{y}{3x}+\frac{4}{y+1}$

c) $\frac{x+1}{x}+\frac{x}{x+1}$

d) $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+1}+\frac{3-x^2}{(x+1)(x-1)}$

a)
Podmínky: $x\neq 0$
Nejjednodušší společný jmenovatel: $3\cdot x$

$$\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+4=\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{3}+\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{x}+4\cdot\frac{3x}{3x}=\frac{6}{3x}+\frac{x^2}{3x}+\frac{12x}{3x}=\frac{x^2+12x+6}{3x}$$

b)
Podmínky: $x\neq 0$, $y\neq 0$
Nejjednodušší společný jmenovatel: $3x(y+1)$

$$\frac{3}{x}+\frac{y}{3x}+\frac{4}{y+1}=\frac{3}{x}\cdot\frac{3(y+1)}{3(y+1)}+\frac{y}{3x}\cdot\frac{y+1}{y+1}+\frac{4}{y+1}\cdot\frac{3x}{3x}=\frac{9y+9+y^2+y+12x}{3x(y+1)}=$$

$$=\frac{y^2+10y+12x+9}{3x(y+1)}$$

c)

Podmínky: $x \neq 0$, $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Nejjednodušší společný jmenovatel: $x \cdot (x+1)$

$$\frac{x+1}{x}+\frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+1}{x+1}+\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x}=\frac{x^2+2x+1}{x(x+1)}+\frac{x^2}{x(x+1)}=\frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)}$$

d)

Podmínky: $x \neq 1$, $x \neq -1$

Nejjednodušší společný jmenovatel: $(x+1)(x-1)$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+1}+\frac{3-x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x+1}+\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x-1}+\frac{3-x^2}{(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{x+1+x^2-x+3-x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{4}{(x+1)(x-1)}$$

Př. 9: Sbírka příklad 3.

Shrnutí: Sčítání i odčítání lomených výrazů opět probíhá podobně jako sčítání a odčítání zlomků.