

1.8.1 Krácení a rozšiřování lomených výrazů

Předpoklady: 1704, 1705, 1708

Lomený výraz = výraz ve tvaru zlomku, například $\frac{\text{mnohočlen}}{\text{mnohočlen}} \Rightarrow$ protože i mnohočleny „jsou jenom čísla“ (i když nevíme jaká), pracujeme s lomenými výrazy stejně jako se zlomky

Podmínky

Dělit nejde všemi čísly \Rightarrow u lomených výrazů musíme stanovit podmínky, aby jmenovatel nebyl roven nule (to už vlastně víme, když jsme se bavili o výrazech).

Na psaní podmínek nebudeme potřebovat žádné další pravidlo kromě jediného: nesmíme dělit nulou.

Př. 1: Urči podmínky, za kterých mají smysl lomené výrazy:

a) $\frac{1}{x-1}$

b) $\frac{2x-3}{x+2}$

c) $\frac{3}{3x-4}$

d) $\frac{x-2}{x^2+1}$

e) $\frac{\frac{3x}{x+1}}{x-3}$

a) $\frac{1}{x-1} \Rightarrow x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

b) $\frac{2x-3}{x+2} \Rightarrow x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ (na čitateli nezáleží, ten může být roven nule)

c) $\frac{3}{3x-4} \Rightarrow 3x-4 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq 4 \Rightarrow x \neq \frac{4}{3}$

d) $\frac{x-2}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1 \neq 0$ platí, vždy protože $x^2 \geq 0 \Rightarrow$ bez podmínky

e) $\frac{\frac{3x}{x+1}}{x-3}$ - složený zlomek = podíl dvou zlomků \Rightarrow rozdělíme si to a řešíme to postupně

• $\frac{3x}{x+1} \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

• $\frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

• $\frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x-3}} \Rightarrow$ číslo $\frac{3x}{x+1}$ dělíme číslem $\frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow \frac{2x+1}{x-3} \neq 0 \Rightarrow 2x+1 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq -1$

$\Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

Pedagogická poznámka: Řešení předchozího příkladu a zejména bodu e) považuji za jeden z klíčových okamžiků při výuce matematiky. Právě psaní podmínek pro dělení, je dobrou ukázkou toho, jak studenti nahrazují správná (ale přemýšlení vyžadující) pravidla jinými (která jsou sice špatně, ale žádné přemýšlení nevyžadují – například automatické $x \neq 0$). Vždy o tomto problému před řešením příkladu mluvím a vždy zdůrazňuji, že žádné další pravidlo kromě zákazu nuly při dělení není třeba.

Bod e) přesto vyřeší většina studentů špatně (nejčastěji zapomínají na $x \neq -\frac{1}{2}$). Při

opravě si pak ukazujeme, že příčinou chyb bylo právě nedůsledné dodržování pravidla ne jeho nedostatečnost. Naopak řešení různých bodů tohoto příkladu ukazuje, že jeho důsledné dodržování umožňuje vyřešit bezchybně i velmi rozdílné situace.

Někteří studenti mají problém i s bodem d), kde se jim opět „podaří“ rozložit mnohočlen $x^2 + 1$. Připomínám jim, aby si prohlídli rozkladný arzenál.

Př. 2: Najdi $D(18,24)$ a $n(18,24)$.

Co to znamená?

$D(18,24)$ - největší (velké písmeno) společný dělitel

$n(18,24)$ - nejmenší (malé písmeno) společný násobek

Obojí hledáme pomocí prvočíselných rozkladů:

$$18 = 3 \cdot 6 = 2 \cdot 3^2$$

$$24 = 4 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3$$

\Rightarrow

$$D(18,24) = 2 \cdot 3 = 6 \quad (\text{čísla v obou rozkladech})$$

$$n(18,24) = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72 \quad (\text{nejvyšší mocniny})$$

Pedagogická poznámka: Jde o jedno z míst, kde se jim hodí čtvrtka s pamětí. Opět si připomínáme, jak si člověk může z logiky zápisu připomenout význam obou pojmů.

Společný dělitel mnohočlenů

mnohočlen, kterým je každý z mnohočlenů dělitelný beze zbytku

\Rightarrow hledáme stejně jako společný dělitel přirozených čísel rozkladem.

Poznámka: Slovo největší nepoužíváme, protože u mnohočlenů nevíme, jaká je hodnota proměnné, tedy ani to, jaká je hodnota mnohočlenu.

Př. 3: Najdi společný dělitel mnohočlenů $6x \cdot (x^2 - y^2)$ a $9y \cdot (x + y)^2$

$$6x \cdot (x^2 - y^2) = 2 \cdot 3x \cdot (x - y) \cdot (x + y)$$

$$9y \cdot (x + y)^2 = 3 \cdot 3y \cdot (x + y)^2$$

společní dělitele jsou 3; $(x + y)$ a všechny jejich možné součiny například $3 \cdot (x + y)$, který bychom mohli nazývat například nejkomplexnější nebo nejsložitější (něco jako obdoba největšího společného dělitele).

Společný násobek mnohočlenů

mnohočlen, který je dělitelný oběma mnohočleny beze zbytku

⇒ hledáme stejně jako společný násobek přirozených čísel rozkladem.

Poznámka: slovo nejmenší nepoužíváme, protože u mnohočlenů nevíme, jaká je hodnota proměnné, tedy ani to, jaká je hodnota mnohočlenu.

Př. 4: Najdi společný násobek mnohočlenů $6x \cdot (x^2 - y^2)$ a $9y \cdot (x + y)^2$

$$6x \cdot (x^2 - y^2) = 2 \cdot 3x \cdot (x - y) \cdot (x + y)$$

$$9y \cdot (x + y)^2 = 3 \cdot 3y \cdot (x + y)^2$$

Do společného násobku započítáme nejvyšší mocniny čísel a mnohočlenů v obou rozkladech:

$$2 \cdot 3^2 \cdot x \cdot y \cdot (x - y)(x + y)^2 - \text{tento násobek bychom mohli nazývat nejjednodušší.}$$

Pedagogická poznámka: U předchozího je důležité, aby si studenti uvědomovali, že stále dělají s výrazy to samé, co dělali s čísly.

Př. 5: Najdi nejsložitější společný dělitel a nejjednodušší společný násobek mnohočlenů $14a^2x^2y(x^2 - y^2) \cdot (a - b)$ a $21ay(x - y) \cdot (a^2 - 2ab + b^2)$.

$$14a^2x^2y(x^2 - y^2) \cdot (a - b) = 2 \cdot 7 \cdot a^2x^2y(x - y)(x + y)(a - b)$$

$$21ay(x - y) \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = 3 \cdot 7 \cdot a \cdot y(x - y) \cdot (a - b)^2$$

nejsložitější společný dělitel (součin společných mocnin): $7 \cdot ay(x - y)(a - b)$

společný násobek (součin nejvyšších mocnin): $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a^2x^2y(x - y)(x + y)(a - b)^2$

Krácení a rozšiřování lomených výrazů

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3 a pro všechny hodnoty proměnných pro něž

$$\frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3} = \frac{V_1}{V_2}$$

jsou V_2 a V_3 různé od nuly platí : $\xrightarrow{\text{krácení}}$

$$\xleftarrow{\text{rozšiřování}}$$

Mezi V_3 a zbytkem čitatele i jmenovatele je krát - ze sčítání a odčítání krátit nelze

- Tady krátit lze $\frac{(x+1)x^2}{(6x-5)(x+1)} = \frac{x^2}{(6x-5)}$. Hodnotu $\frac{x^2}{(6x-5)}$ nejdříve násobíme $\cdot (x+1)$ a pak dělíme stejným číslem: $(x+1)$. \Rightarrow po zkrácení zůstane jeho hodnota stejná a ušetříme si dvě operace.
- Tady krátit **nelze** $\frac{(x+1)x^2 - 1}{(6x-5)(x+1)} \neq \frac{x^2 - 1}{6x-5}$. Hodnotu x^2 nejdříve násobíme $\cdot (x+1)$ a pak dělím stejným číslem, hodnotu -1 (zbytek čitatele) číslem $(x+1)$ pouze dělíme \Rightarrow hodnota celého zlomku by se „zkrácením“ změnila

Př. 6: Změň čítele lomeného výrazu $\frac{(x+1)x^2-1}{(6x-5)(x+1)}$ pomocí závorek tak, aby bylo možné jej upravit krácením.

Aby bylo možné zlomek krátit musí být jeho čítele i jmenovatel napsán ve tvaru součinu \Rightarrow

musíme upravit čítele:
$$\frac{(x+1)(x^2-1)}{(6x-5)(x+1)} = \frac{x^2-1}{6x-5}$$

Př. 7: Zkrať lomené výrazy:

a) $\frac{15b^2xy^2}{20b^2x^2y}$

b) $\frac{(x+1)^2(x-1)}{(x-1)^3(x+1)}$

c) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

d) $\frac{6r^2 \cdot (p^2-4) \cdot (x+y)^2}{9r^2 \cdot (p+2) \cdot (x^2-y^2)}$

e) $\frac{y^2-y-6}{y^2-4y+3}$

f) $\frac{9p^2+1}{9p^2-1}$

a) $\frac{15b^2xy^2}{20b^2x^2y} = \frac{3 \cdot 5 \cdot b^2xy^2}{4 \cdot 5 \cdot b^2x^2y} = \frac{3y}{4x}$

b) $\frac{(x+1)^2(x-1)}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{x+1}{(x-1)^2}$

c) $\frac{x^2-y^2}{x-2xy+y^2} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}$

d) $\frac{6r^2 \cdot (p^2-4) \cdot (x+y)^2}{9r^2 \cdot (p+2) \cdot (x^2-y^2)} = \frac{2 \cdot 3(p+2)(p-2)(x+y)^2}{3^2(p+2) \cdot (x-y)(x+y)} = \frac{2(p-2)(x+y)}{3(x-y)}$

e) $\frac{y^2-y-6}{y^2-4y+3} = \frac{(y-3)(y+2)}{(y-3)(y-1)} = \frac{y+2}{y-1}$

f) $\frac{9p^2+1}{9p^2-1} = \frac{3^2p^2+1}{(3p-1) \cdot (3p+1)}$ - čítele není možné rozložit \Rightarrow zlomek nelze zjednodušit

zkrácením

Př. 8: Sběrka příklad 1.

Shrnutí: S lomenými výrazy pracujeme podobně jako s obyčejnými zlomky. Krátit můžeme pouze přes krát.