

1.7.9 Rozklad mnohočlenů na součin pomocí vzorců

Předpoklady: 1708

Máme dva vzorce, které jsme používali na roznásobení závorek:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

dělají ze součinu mnohočlenů, jeden mnohočlen (opak toho, co při rozkladu na součin chceme) \Rightarrow můžeme je použít obráceným směrem než dosud a z jednoho mnohočlenu získáme součin mnohočlenů:

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2 = (A - B)(A - B)$$

je nutné napsat mnohočlen přesně ve tvaru vzorce:

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A + B)^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + \underbrace{2 \cdot x \cdot 4}_{8x} + 4^2 = (x + 4)^2$$

někdy není vzorec vidět na první pohled:

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - 2x(2y) + (2y)^2 = (x - 2y)^2$$

Př. 1: Rozlož na součin pomocí vzorců:

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $x^2 - 4x + 4$

c) $x^2 + 2xy^2 + y^4$

d) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

e) $x^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{y^2}{9}$

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A + B)^2$$

a) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

b) $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x - 2)^2$

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A + B)^2$$

c) $x^2 + 2xy^2 + y^4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y^2 + (y^2)^2 = (x + y^2)^2$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

$$d) \quad x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$$

$$e) \quad x^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{y^2}{9} = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{y}{3} + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(x - \frac{y}{3}\right)^2$$

Pedagogická poznámka: Se zapisováním vzorců nad rozkládaný mnohočlen je to stejné jako v podobných příkladech. Netrvám na tom, ale rada „napiš si tam ten vzorec“ je první, kterou říkám, když si všimnu chyby.

na začátku nemusí být pouze x^2

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = (2x + y)^2$$

Př. 2: Rozlož na součin pomocí vzorců:

$$a) \quad 9x^2 + 18x + 1$$

$$b) \quad 4x^2 + 12xy^3 + 9y^6$$

$$c) \quad 4cd - c^2 - 4d^2$$

$$d) \quad 2x^2 - 2\sqrt{6}xy + 3y^2$$

$$e) \quad x^2 + 6xy + 2y^2$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

a) $9x^2 + 18x + 1 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 3 + 1^2 =$ \Rightarrow pomocí vzorce rozložit **nejde**, B se nemůže najednou rovnat 3 a 1

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

$$b) \quad 4x^2 + 12xy^3 + 9y^6 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y^3 + (3y^3)^2 = (2x + 3y^3)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$$

$$c) \quad 4cd - c^2 - 4d^2 = -(c^2 - 4cd + 4d^2) = -[c^2 - 2 \cdot c \cdot 2d + (2d)^2] = -(c - 2d)^2$$

$$A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A - B)^2$$

$$d) \quad 2x^2 - 2\sqrt{6}xy + 3y^2 = (\sqrt{2}x)^2 - 2 \cdot \sqrt{2}x \cdot \sqrt{3}y + (\sqrt{3}y)^2 = (\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)^2$$

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A+B)^2$$

e) $x^2 + 6xy + 2y^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (\sqrt{2}y)^2$ \Rightarrow pomocí vzorce rozložit **nejde**

muselo by platit $B = 3y = y\sqrt{2}$ a to platí jen, když $y = 0 \Rightarrow$ pokud se nám nepodaří vyrobit přesně vzorec, máme smůlu

Pedagogická poznámka: Je důležité zkontrolovat, zda studenti „nerozložili“ body a) a e), zejména slabší studenti mají tendenci „něco napsat“ a považovat úkol za splněný bez ohledu na pravdivost toho, co napsali.

Na rozkládání máme i jeden vzorec, který se nepoužívá k násobení.

$$A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$$

- vlastně ho už známe z rozšiřování zlomků

$$A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$$

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$$

někdy se tomu musí trochu pomoci a mocniny „vyrobit“

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$2x^2 - 3 = (\sqrt{2}x)^2 - (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})$$

Př. 3: Rozlož na součin pomocí vzorce $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ mnohočleny:

a) $4 - y^2$

b) $9x^2 - 1$

c) $4y^3 - 9x^2y$

d) $x^2 - 2$

e) $x^4 - y^4$

f) $9x^2 - y^2 + 2xy - x^2$

a) $4 - y^2 = 2^2 - y^2 = (2 - y)(2 + y)$

b) $9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x - 1)(3x + 1)$

c) $4y^3 - 9x^2y = y(4y^2 - 9x^2) = y[(2y)^2 - (3x)^2] = y(2y - 3x)(2y + 3x)$

d) $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

e) $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$

f) $9x^2 - y^2 + 2xy - x^2$ - na první pohled to nevypadá, ale poslední tři členy něco připomínají

$$\begin{aligned} 9x^2 - y^2 + 2xy - x^2 &= 9x^2 - (y^2 - 2xy + x^2) = (3x)^2 - (y - x)^2 = \\ &= [3x - (y - x)][3x + (y - x)] = (4x - y)(2x + y) \end{aligned}$$

Př. 4: Najdi chybu v následujícím postupu:

$$a^2 + b^2 = a^2 - (-b)^2 = [a - (-b)][a + (-b)] = (a + b)(a - b)$$

Chyba je hned na začátku

postup připomíná známou úpravu $a + b = a - (-b)$

ale druhá mocnina je problém:

$a^2 + b^2 = a^2 - (-b^2)$ je správně, ale nemůžeme napsat $(-b^2) = (-b)^2$, protože při umocňování na druhou zmizí mínus, $(-b)^2 = b^2$

⇒ **Vzorec pro rozklad mnohočlenu $a^2 + b^2$ neexistuje (v množině reálných čísel).**

Pedagogická poznámka: Doporučuji zapsání faktu, že mnohočlen $a^2 + b^2$ nejde rozložit do rozkládacího arzenálu. Ti, kteří se „úspěšně“ o rozklad takového mnohočlenu kdykoliv později pokusí, si ho zapisují povinně.

rozklady se dají použít i na první pohled neřešitelné příklady

Př. 5: Urči jakou nejmenší hodnotu může mít mnohočlen $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8$.

(Nápověda: Platí: $(x-2)^2 \geq 0$).

Při dosazování různých čísel za x a y se mění hodnota mnohočlenu. Proč by měla existovat nejmenší možná hodnota?

Existuje mnohočlen s nejmenší hodnotou?

Například $x^2 \geq 0$, podobně i $(x-3)^2 \geq 0$ (opět jde o číslo na druhou) ⇒ zkusíme

v mnohočlenu všechny neznámé uzavřít do závorek s druhou mocninou ⇒ musíme tam vytvořit vzorce:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8 &= x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 8 = \\&= (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 8 = \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y-2)^2}_{\geq 0} + 3\end{aligned}$$

⇒ výraz $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8$ je vždy větší nebo roven 3

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je parafrází na příklad z učebnice. Nejsm si úplně jistý, zda je nutné ho zařadit (pokud bych musel probírat rozklady rychleji, určitě bych ho vyřadil). Na druhou stranu je určitě hezkou ukázkou toho, na co se dají vzorce použít. Studenti s ním mají problémy a jen málo z nich ho dokáže vyřešit zcela samostatně, proto příliš dlouho nečekám, než jim, řešení ukáži. Následující příklad řešíme pouze, když máme dostatek času na dobrání zbytku hodiny.

Př. 6: Urči jakou nejmenší hodnotu může mít mnohočlen $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y$.

Použijeme stejný postup jako v předchozím příkladu:

$$\begin{aligned}x^2 + 4y^2 + 6x - 8y &= x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 2 + 2^2 - 2^2 = \\&= (x+3)^2 - 9 + (2y-2)^2 - 4 = (x+3)^2 + (2y-2)^2 - 13\end{aligned}$$

Pro hodnoty mnohočlenu platí, že jsou vždy ≥ -13 .

Shrnutí: