1.7.6 Použití vzorců při úpravách mnohočlenů

Předpoklady: 1704, 1705

Pedagogická poznámka: Množství příkladů asi přesahuje možnosti 45 minut. Je možné vynechat poslední tři příklady, nebo věnovat hodině ještě část následující hodiny a její zbytek pak nechat studenty samostatně počítat ze sbírky.

Umocňování výrazů typu $(2x+4)^2$ probíhá vždy podobně $\Rightarrow$ práci si můžeme usnadnit pomocí vzorců.

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + 2AB + B^2$$

Př. 1: Vypočti pomocí vzorce výraz $(2x+4)^2$

$A = 2x; B = 4$

$(A+B)^2 = \quad A^2 \quad +2\cdot A\cdot B + B^2$

$(2x+4)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 4 + 4^2 = 4x^2 + 16x + 16$

Př. 2: Vypočti pomocí vzorce výraz $\left(6x+\frac{1}{3}\right)^2$

$A = 6x; B = \frac{1}{3}$

$(A+B)^2 = \quad A^2 \quad +2\cdot A\cdot B + \; B^2$

$\left(6x+\frac{1}{3}\right)^2 = (6x)^2 + 2\cdot 6x\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 36x^2 + 4x + \frac{1}{9}$

Pedagogická poznámka: U některých studentů jsem se setkal s tím, že nepíší dosazení do vzorce, ale rovnou výsledek. Takový postup je samozřejmě možný, ale u složitějších příkladů (například hned následující příklad) často ústí do chyb. Při hodině chci aby u všech následujících příkladů psali raději i dosazení.

Př. 3: Vypočti pomocí vzorce $\left(x^2y^3+\frac{2}{3}xy\right)^2$

Nyní už budeme počítat rovnou:

$\left(x^2y^3+\frac{2}{3}xy\right)^2 = \left(x^2y^3\right)^2 + 2\cdot x^2y^3\cdot\frac{2}{3}xy + \left(\frac{2}{3}xy\right)^2 = x^4y^6 + \frac{4}{3}x^3y^4 + \frac{4}{9}x^2y^2$

Př. 4: Odvoď vzorec pro výraz $(A-B)^2$.

$(A-B)^2=(A-B)\cdot(A-B)=A^2-AB-AB+B^2=A^2-2AB+B^2$

$$(A-B)^2=(A-B)\cdot(A-B)=A^2-2AB+B^2$$

Př. 5: Vypočti pomocí vzorce $\left(\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)^2$

$A=\frac{x}{2};B=\sqrt{3}$

$(A-B)^2 \quad = \quad A^2-2\cdot A\cdot B + B^2$

$\left(\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\frac{x^2}{4}-x\sqrt{3}+3$

Př. 6: Odvoď pomocí vzorce $(A+B)^2$, vzorec $(A-B)^2$

Musíme v závorce $(A-B)$ vyrobit mezi členy plus $\Rightarrow (A-B)=(A+(-B))$

Dosadím:

$$(A+\quad B)^2=\quad A^2+2A\quad B+\quad B^2$$

$(A-B)^2=(A+(-B))^2=A^2+2A(-B)+(-B)^2=A^2-2AB+B^2$

Př. 7: Vypočti pomocí vzorce $\left(2x^2y-\frac{1}{2}y^2\right)^2$

$\left(2x^2y-\frac{1}{2}y^2\right)^2=\left(2x^2y\right)^2-2x^2y\cdot\frac{1}{2}y^2+\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2=4x^4y^2-2x^2y^3+\frac{1}{4}y^4$

Př. 8: Odvoď vzorec $(A+B)^3$.

$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=(A^2+2AB+B^2)\cdot(A+B)=$

$=A^2\cdot A+2AB\cdot A+B^2\cdot A+A^2\cdot B+2AB\cdot B+B^2\cdot B=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

Odvození vzorce pro $(A+B)^3$ je dobrou příležitostí si popovídat o způsobech přibližné kontroly výsledků – kontroly, kterou lze udělat rychle a která umožňuje odhalit část chyb vzniklých při výpočtu.

$(A+B)^3$ - ze zadání je vidět, že konečný vzorec musí splňovat následující podmínky:

- musí být symetrický pro A a B (symetrický je i původní vzorec $(A+B)^3$)

- součet mocnin *A* a *B* v každém členu musí dát dohromady třetí mocninu (každý člen vznikne roznásobením tří závorek s první mocninou *A* nebo *B*)
- musí obsahovat A^3 a B^3 (při roznásobování závorek $(A+B)(A+B)(A+B)$ vzniknou při násobení pouze prvních nebo pouze posledních členů)
- všechny koeficienty (čísla před proměnnými) musí být kladné

Určitě je možné vymyslet i jiné snadno kontrolovatelné podmínky. Důležité je, uvědomit si, že kontrolu můžeme snadno alespoň částečně provést sami.

Pedagogická poznámka: U předchozího povídání je potřeba, aby z něj studenti odnesli poznatek, že je dobré si výpočty kontrolovat. Nesmí však nabýt dojmu, že právě zmiňované vlastnosti jsou obecné, nebo nějak výjimečné. Naopak měli by pochopit, že většina takových kontrol je důsledkem konkrétní situace.

Př. 9: Vypočti pomocí vzorce $(3x+2)^3$.

$$(3x+2)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2 \cdot 2 + 3(3x) \cdot 2^2 + 2^3 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$$

Př. 10: Vypočti pomocí vzorce $\left(2x+\frac{1}{3}xy\right)^3$

$$\left(2x+\frac{1}{3}xy\right)^3 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2 \frac{1}{3}xy + 3\cdot 2x\left(\frac{1}{3}xy\right)^2 + \left(\frac{1}{3}xy\right)^3 =$$

$$= 8x^3 + 4x^3y + \frac{2}{3}x^3y^2 + \frac{1}{27}x^3y^3$$

Pedagogická poznámka: Občas se vyskytují studenti, kteří nevezmou vzorec pro třetí mocninu za svůj a kteří se snaží se jeho používání obejít roznásobováním závorek nebo používáním vzorce pro druhou mocninu.
Takový přístup v tomto okamžiku zakazuji, protože cílem hodiny je naučit se vzorce používat.

Př. 11: Odvoď pomocí vzorce $(A+B)^3$, vzorec $(A-B)^3$. Urči podmínky, které bude muset výsledný vzorec splňovat a s jejich pomocí jej zkontroluj.

Podmínky: vzorec musí:

- být symetrický pro *A* a *B*
- součet mocnin *A* a *B* v každém členu musí dát dohromady třetí mocninu
- musí obsahovat A^3 a B^3
- před členy s lichou mocninou *B* musí být mínus

Musíme v závorce $(A-B)$ vyrobit mezi členy mínus $\Rightarrow (A-B)=(A+(-B))$

$$(A-B)^3 = (A+(-B))^3 = A^3 + 3A^2(-B) + 3A(-B)^2 + (-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

Př. 12: Vypočti pomocí vzorce $\left(3x^2y-\frac{1}{3}xy\right)^3$

$$\left(3x^2y-\frac{1}{3}xy\right)^3=\left(3x^2y\right)^3-3\cdot\left(3x^2y\right)^2\left(\frac{1}{3}xy\right)+3\left(3x^2y\right)\left(\frac{1}{3}xy\right)^2-\left(\frac{1}{3}xy\right)^3=$$
$$=27x^6y^3-9x^5y^3+x^4y^3-\frac{1}{27}x^3y^3$$

Př. 13: Odvoď vzorce pro $(A+B)^4$ a $(A-B)^4$. Před vlastním výpočtem najdi podmínky, které budou muset vzorce splňovat a po výpočtu podle nich zkontroluj své výsledky.

Podmínky: : vzorec pro $(A+B)^4$ musí:

- být symetrický pro *A* a *B*
- součet mocnin *A* a *B* v každém členu musí dát dohromady čtvrtou mocninu
- musí obsahovat A^4 a B^4
- všechny členy musí být kladné

$$(A+B)^4=(A+B)^3(A+B)=\left(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3\right)(A+B)=$$
$$A^4+3A^3B+3A^2B^2+AB^3+A^3B+3A^2B^2+3AB^3+B^4=$$
$$A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4$$

Podmínky: : vzorec pro $(A-B)^4$ musí:

- být symetrický pro *A* a *B*
- součet mocnin *A* a *B* v každém členu musí dát dohromady čtvrtou mocninu
- musí obsahovat A^4 a B^4
- před členy s lichou mocninou *B* musí být mínus

$$(A-B)^4=\left[A+(-B)\right]^4=A^4+4A^3(-B)+6A^2(-B)^2+4A(-B)^3+(-B)^4=$$
$$=A^4-4A^3B+6A^2B^2-4AB^3+B^4$$

Př. 14: Sbírka příklad 4.

Shrnutí: Vzorce umožňují zrychlit mnohé úpravy mnohočlenů.