1.7.1 Výrazy, definiční obor

Předpoklady: 1207, 1209

Výrazy: $1+1$; $\frac{a-b}{\pi+a}$; $\sqrt{a^2+b^2}$; $|x-2|+y^2$; $\frac{1}{3}\pi vr^2$

obsahují:

- matematické operace
- čísla (**konstanty**)
- písmena (**proměnné**) = „žolíky“ místo, kterých mohu dosazovat čísla z nějaké množiny (definičního oboru proměnné), někdy za ně dosazujeme cokoliv, častěji mají čísla dosazovaná za proměnnou nějaký význam (například ve výrazu $\frac{1}{3}\pi vr^2$, který představuje vzorec pro objem kužele, mají čísla dosazovaná za proměnnou *v* význam výšky kužele)

Pozor!!!! π je číslo (konstanta) i když je zapsané písmenem, protože písmeno π znamená stále stejné číslo

Poznámka: Situace se znakem π ke poměrně jednoduchá, protože se nikdy nepoužívá v jiném významu než jako označení Ludolfova čísla ($\pi \doteq 3{,}14$). Horší je situace s písmenem *e*, které jednak označuje jednu ze základních matematických konstant tzv. Eulerovo číslo ($e \doteq 2{,}78$), na druhé straně se občas používá k označování obyčejných proměnných. V jejím případě je nutné aktuální význam rozeznat vždy z kontextu. Na vysokých školách je konstant a proměnných, které potřebují označit nějakým písmenem tolik, že nepostačují ani dvě abecedy (latinka a řecká) a různé velikosti písmenek.

Definiční obor výrazu (dále jen definiční obor) = vše, co můžu dosazovat $\Rightarrow$ záleží na úhlu pohledu:

- „co je rozumné“ $\Rightarrow$ $\frac{1}{3}\pi vr^2$ - objem kužele $\Rightarrow$ za *r* i *v* můžu dosazovat pouze kladná čísla
- „co to unese“ $\Rightarrow$ $\frac{1}{3}\pi vr^2$ - obecný výraz bez speciálního smyslu (matematicky) $\Rightarrow$ za *r* i *v* můžu dosazovat všechna reálná čísla, protože pro všechna reálná čísla ho dokážu spočítat

Není-li určeno jinak **definičním oborem výrazu rozumíme množinu všech čísel, pro která dokážeme výraz spočítat** (určit hodnotu) $\Rightarrow$ je třeba dát pozor na operace, které nejdou provést se všemi čísly (dělení, odmocňování …)

Definiční obor výrazu v pro proměnou *x* budeme značit $D(v)_x$ (Pokud výraz obsahuje pouze jedinou proměnnou, nebudeme ji vypisovat).

Po dosazení čísel z definičního oboru za proměnné a spočítání získám **hodnotu výrazu**.

Př. 1: Urči definiční obor výrazu pro proměnnou *x* ve výrazu $\frac{x^2-1}{x-2}$ (tedy $D\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)_x$) a urči jeho hodnotu pro $x=3$.

Ve výrazu je dělení, nelze dělit nulou proto $x-2\neq 0$ a tedy $x\neq 2$ $\Rightarrow$ $D(v)=R-\{2\}$

Hodnota výrazu $\frac{x^2-1}{x-2}=\frac{3^2-1}{3-2}=8$

Pedagogická poznámka: Studentům je potřeba zdůraznit, že definiční obor sestavujeme na základě jediného pravidla – „vylučujeme čísla, se kterými nelze provést všechny operace ve výrazu“. Nic víc by si pamatovat neměli, protože hlavně ti méně nadaní mají sklon k tvorbě pravidel typu: „když se dělí, nesmí být *x* nula“ nebo „pod odmocninou musí být *x* větší než nula“ a vůbec neberou ohled na to, zda je pod odmocninou pouze *x* nebo nějaký výraz, který *x* obsahuje.

Postup je pak jednoznačný (příklad předchozí výraz $\frac{x^2-1}{x-2}$):

- zjistím nebezpečnou operaci (dělení)
- najdu výraz, který do ní vstupuje ($x-2$)
- zajistím, aby výraz nenabýval zakázanou hodnotu ($x-2\neq 0$)
- z předešlé podmínky vypočítám zakázanou hodnotu proměnné ($x\neq 2$)
- všechny ostatní čísla zahrnu do definičního oboru $D(v)=R-\{2\}$

Určování definičního oboru je dobrou příležitostí, jak nacvičovat postup podle pravidel a odolávání svodům „rychlého“ řešení.

Př. 2: Urči definiční obory výrazu $\frac{\sqrt{y-3}}{x^2-4}$ pro obě jeho proměnné a urči jeho hodnotu pro $x=1; y=4$.

Dvě vachrlaté operace – dělení a odmocnina.

Nelze dělit nulou $\Rightarrow$ $x^2-4\neq 0 \Rightarrow x\neq -2; x\neq 2$ $\quad D(v)_x=R-\{-2;2\}$

Odmocnina pouze z nezáporných čísel $y-3\geq 0 \Rightarrow y\geq 3$ $\quad D(v)_y=\langle 3;\infty)$

Hodnota výrazu: $\frac{\sqrt{y-3}}{x^2-4}=\frac{\sqrt{4-3}}{1^2-4}=-\frac{1}{3}$

Př. 3: Urči hodnotu výrazu $\frac{x-2}{x^2+x-12}$ pro:

a) $x=-2$
b) $x=3$

a) $\frac{x-2}{x^2+x-12}=\frac{(-2)-2}{(-2)^2+(-2)-12}=\frac{-4}{-10}=\frac{2}{5}$

b) $\frac{x-2}{x^2+x-12}=\frac{3-2}{3^2+3-12}=\frac{1}{0}$ $\Rightarrow$ nulou nelze dělit $\Rightarrow$ pro číslo $x=3$ není možné výraz spočítat, nepatří tedy do definičního oboru výrazu a nemá smysl se ptát jakou hodnotu pro něj výraz má.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je test na dodržování pravidel. I když všichni ví, že nulou se nedá dělit, přesto se vždy najde pár takových, kteří to úspěšně udělají.

Př. 4: Najdi, co nejrychlejší způsob jak rozhodnout jestli čísla $\{-2;0;1\}$ patří do definičního oboru výrazu $\frac{x^2-2}{x^2-4x+3}$.

Bylo by možné rozhodnout tak, že určíme definiční obor a zjistíme zda do něj čísla patří nebo ne. Vzhledem k tomu, že je čísel málo, je daleko rychlejší zkusit je dosadit do jmenovatele zlomku a spočítat jej. Pokud vyjde nula, číslo do definičního oboru nepatří, pokud vyjde nenulový, číslo do něj patří.

$x=-2 \Rightarrow x^2-4x+3=(-2)^2-4(-2)+3=15 \Rightarrow$ číslo –2 do definičního oboru patří

$x=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0^2-4\cdot 0+3=3 \Rightarrow$ číslo 3 do definičního oboru patří

$x=1 \Rightarrow x^2-4x+3=1^2-4\cdot 1+3=0 \Rightarrow$ číslo 1 do definičního oboru nepatří, dělil bych nulou

Pedagogická poznámka: Cvičení na zkostnatělost myšlení. Jen málo studentů bude opravdu uvažovat o nejsnazším řešení, většina bude opakovat postup z předchozích příkladů.

Pedagogická poznámka: Ve všech následujících příkladech jde o určování definičního oboru. Protože však dělají studentům značné potíže, jsou rozděleny do jednotlivých příkladů, aby kontrola probíhala průběžně a značná část třídy nezůstala zcela bezmocně přihlížet. Přesto bych se přimlouval za to, aby studenti dostali šanci spočítat příklady špatně a sami si zkusili udělat chyby. Pravděpodobnost, že si dají příště pozor je tak větší (i když stále poměrně malá).

Př. 5: Urči definiční obor výrazu $\frac{1}{x^2+1}$ a vyjádři ho pomocí intervalů.

nebezpečná operace: dělení $\Rightarrow x^2+1\neq 0 \Rightarrow x^2\neq -1$ - to platí vždy $\Rightarrow D(v)=R$

Př. 6: Urči definiční obor výrazu $\sqrt{1-|x|}$ a vyjádři ho pomocí intervalů.

nebezpečná operace: odmocnina $\Rightarrow 1-|x|\geq 0 \Rightarrow 1\geq |x| \Rightarrow$ řeším nerovnici s absolutní hodnotou $\Rightarrow$ hledám čísla, která jsou od nuly vzdálena o jedna nebo méně $\Rightarrow D(v)=\langle -1;1\rangle$

Pedagogická poznámka: Je dobré upozorňovat studenty (hlavně ty, kteří příklad nespočítají sami), že v něm nebylo nic nového, pouze jedno pravidlo ze začátku hodiny a pak opakování věcí, které by dávno měli znát.
Na tomto příkladu jsou dvě důležité věci:
“schopnost přepínat do podprogramu“ – jde o to, aby studenti dokázali ve chvíli, kdy dojdou k nerovnici $1\geq |x|$, začít pracovat na jejím řešení, stejně jako kdyby sama nerovnice, byla příkladem, který mají spočítat (to vůbec není samozřejmé) a navíc, aby ve chvíli, kdy nerovnici dořeší, věděli, že šlo pouze o část řešení něčeho

jiného a zbytek práce teprve zbývá dokončit,
"schopnost si něco pamatovat" – řešení nerovnic s absolutní hodnotou, je už vzdálenější látkou a není vůbec samozřejmé, že si studenti budou něco pamatovat, i když mají k dispozici sešit nebo jiné pomůcky.

Př. 7: Urči definiční obor výrazu $\frac{2x}{|x-1|}$.

nebezpečná operace: dělení $\Rightarrow |x-1| \neq 0 \Rightarrow x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D(v) = R - \{1\}$

Př. 8: Urči definiční obor výrazu $\sqrt{|x+2|}$.

nebezpečná operace: odmocnina $\Rightarrow |x+2| \geq 0$ - to platí vždy $\Rightarrow D(v) = R$

Př. 9: Urči definiční obor výrazu $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2x+3}$.

jsou tam tři nebezpečné operace, řeším každou zvlášť
nebezpečná operace: dělení $\Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$
nebezpečná operace: dělení $\Rightarrow x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
nebezpečná operace: dělení $\Rightarrow 2x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{3}{2}$
$\Rightarrow D(v) = R - \left\{-\frac{3}{2}; -1; 2\right\}$

Př. 10: Sbírka příklad 1

Shrnutí: Pro určování definičního oboru nám stačí jediné pravidlo: vyloučím všechna čísla, pro která nedokážeme výraz spočítat.