1.6.5 Mocniny s celým mocnitelem II

Počítání se zlomky:

Př. 1: Uprav zlomek $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$ tak, abys odstranil zápornou mocninu.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}=\frac{3^{-4}}{4^{-4}}=3^{-4}\cdot\frac{1}{4^{-4}}=\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4^4}}=\frac{4^4}{3^4}$$

jinak $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^4}=\frac{1}{\frac{3^4}{4^4}}=1:\frac{3^4}{4^4}=1\cdot\frac{4^4}{3_4}=\frac{4^4}{3^4}$

ještě jinak $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}=\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right)^4=\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)^4=\left(\frac{4}{3}\right)^4=\frac{4^4}{3^4}$.

$\Rightarrow$ všechny výsledky stejné

Př. 2: Zformuluj pravidlo pro odstranění záporné mocniny ze zlomku.

Pro každá dvě reálná čísla a, b, $a\neq 0, b\neq 0$ a pro každé celé číslo z platí:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-z}=\left(\frac{b}{a}\right)^{z}$$

Př. 3: Uprav zlomky, tak abys odstranil zápornou mocninu:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{1}\right)^{2}=4$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\frac{3^2}{2^2}=\frac{2^3}{3^3}\frac{3^2}{2^2}=\frac{2}{3}$

Př. 4: Najdi alespoň jeden způsob, jak převést dělení výrazem $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$ na násobení.

Zkoušíme:

$$1:\left(\frac{a}{b}\right)^{z}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{z}}=1\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-z}=1\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{z}$$

Pro každá dvě reálná čísla a, b, $a \neq 0, b \neq 0$ a pro každé celé číslo z platí:

$$1 : \left(\frac{a}{b}\right)^{z} = 1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = 1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{z}$$

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny tvoří samostatné počítání studentů, kontrolu provádíme tak, aby si všichni stihli spočítat alespoň příklady 5. –7. Ti rychlejší stihnou všechno a dopočítají se až k příkladům se sbírky.
Je potřeba, aby studenti nejen nedělali chyby, ale alespoň příklady, které počítají ve škole, řešili rozumných způsobem (podle zásad KISS, bez obcházení záporných mocnin atd.).

Př. 5: Uprav výrazy a výsledek vyjádři bez použití zlomků:

a) $\frac{a^2b}{c^3} : \frac{ab^2}{c^2} =$ b) $\frac{a^2}{c^{-3}} : \left(\frac{a}{c^2}\right)^{-2} =$ c) $\frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} : \left(\frac{b^3c}{a^2}\right)^2 =$

a) $\frac{a^2b}{c^3} : \frac{ab^2}{c^2} = \frac{a^2b}{c^3} \cdot \frac{c^2}{ab^2} = a^{2-1} \cdot b^{1-2} \cdot c^{2-3} = a \cdot b^{-1} \cdot c^{-1}$

b) $\frac{a^2}{c^{-3}} : \left(\frac{a}{c^2}\right)^{-2} = \frac{a^2}{c^{-3}} \cdot \left(\frac{a}{c^2}\right)^{2} = \frac{a^2}{c^{-3}} \cdot \frac{a^2}{c^4} = \frac{a^{2+2}}{c^{-3+4}} = \frac{a^4}{c} = a^4 \cdot c^{-1}$

c) $\frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} : \left(\frac{b^3c}{a^2}\right)^2 = \frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} \cdot \left(\frac{a^2}{b^3c}\right)^2 = \frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} \cdot \frac{a^4}{b^6c^2} = \frac{a^{-3+4}b^{2-6}}{c^{-3+2}} = \frac{ab^{-4}}{c^{-1}} = acb^{-4}$

Př. 6: Zjednoduš výraz $\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^2}\right)^{-3}$ a výsledek uveď pomocí kladných mocnin

$$\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^2}\right)^{-3} = \frac{a^6b^{-9}}{c^{-6}} = \frac{a^6c^6}{b^9}$$

jinak $\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^2}\right)^{-3} = \left(\frac{c^2}{a^{-2}b^3}\right)^{3} = \frac{c^6}{a^{-6}b^9} = \frac{a^6c^6}{b^9}$

Pedagogická poznámka: U tohoto a následujících příkladů je v případě, že studenti počítají sami, potřeba zabránit tomu, aby obcházeli používání záporných mocnin a tak komplikovali výpočet, například takto:

$$\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^2}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a^2}b^3}{c^2}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{\frac{b^3}{a^2}}{\frac{c^2}{1}}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{b^3}{a^2c^2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{b^6}{a^6c^6}} = \frac{a^6c^6}{b^9}$$

Př. 7: Zjednoduš výrazy a výsledky uveď pomocí kladných mocnin:

a) $\left(\dfrac{9a^{-2}c^{3}}{8b^{-2}}\right)^{-3}$

b) $\dfrac{9a^{6}b^{-5}}{c^{-3}}:\left(\dfrac{3^{-1}b^{3}}{a^{2}c^{-4}}\right)^{-2}$

a) $\left(\dfrac{9a^{-2}c^{3}}{8b^{-2}}\right)^{-3}=\left(\dfrac{3^{2}a^{-2}c^{3}}{2^{3}b^{-2}}\right)^{-3}=\dfrac{3^{-6}a^{6}c^{-9}}{2^{-9}b^{6}}=\dfrac{2^{9}a^{6}}{3^{6}c^{9}b^{6}}$

b) $\dfrac{9a^{6}b^{-5}}{c^{-3}}:\left(\dfrac{3^{-1}b^{3}}{a^{2}c^{-4}}\right)^{-2}=\dfrac{3^{2}a^{6}b^{-5}}{c^{-3}}\cdot\left(\dfrac{3^{-1}b^{3}}{a^{2}c^{-4}}\right)^{2}=\dfrac{3^{2}a^{6}b^{-5}}{c^{-3}}\cdot\dfrac{3^{-2}b^{6}}{a^{4}c^{-8}}=\dfrac{a^{2}b^{1}}{c^{-11}}=a^{2}bc^{11}$

Př. 8: Zapiš výraz $\left(\dfrac{8\cdot10^{2}\cdot9^{-3}}{15^{4}\cdot12^{-3}}\right)^{-3}:\left(\dfrac{24^{-1}\cdot6^{3}}{20^{2}\cdot5^{-4}}\right)^{2}$ pomocí celočíselných mocnin prvočísel bez zlomkové čáry. Dodržuj zásadu KISS.

$\left(\dfrac{8\cdot10^{2}\cdot9^{-3}}{15^{4}\cdot12^{-3}}\right)^{-3}:\left(\dfrac{24^{-1}\cdot6^{3}}{20^{2}\cdot5^{-4}}\right)^{2}=$ složená čísla rozložím na prvočísla

$\left(\dfrac{2^{3}\cdot[2\cdot5]^{2}\cdot\left[3^{2}\right]^{-3}}{[3\cdot5]^{4}\cdot\left[2^{2}\cdot3\right]^{-3}}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{\left[2^{3}\cdot3\right]^{-1}\cdot[2\cdot3]^{3}}{\left[2^{2}\cdot5\right]^{2}\cdot5^{-4}}\right)^{-2}=$ odstraním vnitřní hranaté závorky

$\left(\dfrac{2^{3}\cdot2^{2}\cdot5^{2}\cdot3^{-6}}{3^{4}\cdot5^{4}\cdot2^{-6}\cdot3^{-3}}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{2^{-3}\cdot3^{-1}\cdot2^{3}\cdot3^{3}}{2^{4}\cdot5^{2}\cdot5^{-4}}\right)^{-2}=$ vypočítám vnitřky obou zlomků

$\left(2^{3+2+6}\cdot5^{2-4}\cdot3^{-6-4-(-3)}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{2^{-3+3-4}\cdot3^{-1+3}}{5^{2-4}}\right)^{-2}=$

odstraním závorky

$\left(2^{11}\cdot5^{-2}\cdot3^{-7}\right)^{-3}\cdot\left(2^{-4}\cdot3^{2}\cdot5^{2}\right)^{-2}=$

$2^{-33}\cdot5^{6}\cdot3^{21}\cdot2^{8}\cdot3^{-4}\cdot5^{-4}=$ spočítám obě části dohromady

$=2^{-33+8}\cdot5^{6-4}\cdot3^{21-4}=2^{-25}\cdot5^{2}\cdot3^{17}$

Pedagogická poznámka: Příklad je nutné řešit pomalu po jednotlivých krocích a trvat na tom, aby studenti pracovali systematicky a přehledně.

Př. 9: Sbírka příklad 7 d) e) f) g) h)
Sbírka příklad 8 h)

Př. 10: Petáková:
strana 62/cvičení 43 a) b) c) d) e) f)

Shrnutí: Pro zlomek se zápornou mocninou platí $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$. Při dělení zlomky platí:

$:\left(\frac{a}{b}\right)^{z} = \cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = \cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{z}$.