Konec srandy!!!

1.6.1 Mocniny s přirozeným mocnitelem I

Předpoklady: základní početní operace

Pedagogická poznámka: Zápis na začátku kapitoly je víc než jen sranda. Tato hodina je první v druhé části studia. Až dosud nehrálo příliš velkou roli zda studenti chápou a pamatují si všechno, co jsme probírali.
Od tohoto okamžiku se situace mění. Fakt, že studenti pochopí a budou si pamatovat všechny hlavní poznatky (červené rámečky), které budeme nyní probírat je z hlediska budoucího postupu v matematice zcela zásadní. Od tohoto okamžiku stavíme základy, na kterých bude stát celý zbytek matematického vzdělávání na gymnáziu.
Zatímco dosud byla hlavním cílem práce o hodinách to, aby se studenti naučili pracovat a chápat probíranou látku, nyní je k tomu potřeba přidat ještě zapamatování si probírané látky a stavbu konzistentního systému.
Dalším cílem výuky v tomto období je získání mechanických schopností při úpravě výrazů. Z tohoto důvodu v tomto období trvám na tom, aby studenti opravdu počítali všechny příklady ve sbírkách.

Pedagogická poznámka: Podle mě není možné probrat všechny vzorce pro mocniny s přirozeným mocnitelem v jediné hodině. Já jsem látku rozdělil do dvou hodin, navíc logicky k těmto dvěma hodinám patří i hodina *1603 KISS*, kde se studenty snažím naučit základní strategii postupného upravování bez zbytečného zesložiťování příkladu.
Je nutné, aby po každém vzorci i Ti nejpomalejší samostatně vyřešili alespoň několik prvních bodů z následujícího příkladu. Ti rychlejší mají příkladů samozřejmě víc, navíc se mohou zabavit počítáním sbírky.

Matematika se snaží o zestručnění a zpřehlednění zápisu $\Rightarrow$
$5+5+5+5+5+5=6\cdot5$ (součet jsem napsal jako součin)
$5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=5^6$ (součin jsem napsal jako mocninu)

Pro každé $a \in R$ a $n \in N$ platí: $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n-\text{krát}}$.

- to není žádný objev na pochopení, jde jen o zestručnění zápisu

Terminologie:
a^n - **mocnina**
a – **základ mocniny (mocněnec)**
n – **exponent (mocnitel)**

Pozor:

$(-2)^4 = 16$ **umocňuju číslo –2**

$-2^4 = -16$ **umocňuju číslo 2, pak násobím –1 (umocňování má přednost)**

Př. 1: Doplň větu: Pro každé $a \in R$ a každé $n \in N$ platí:
$a^1 =$ $1^n =$ $0^n =$

Důsledky definice mocniny:
Pro každé $a \in R$ a každé $n \in N$ platí:

- $a^1 = a$
- $1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{n-\text{krát}} = 1$
- $0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot ... \cdot 0}_{n-\text{krát}} = 0$

Pedagogická poznámka: Už v předchozím příkladu dělají někteří studenti chybu, nejčastěji $1^n = n \cdot 1$. Tento omyl vychází z předpokladu, že číslo v exponentu slouží k násobení základu mocniny.

Př. 2: Na příkladech zjisti, jak závisí znaménko mocniny na hodnotách čísel *a* a *n*. Postřehy co nejexaktněji ověř a zjištěné skutečnosti zapiš do přehledné tabulky.

Zkouším:
$2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$
$3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$
$(-2)^1 = -2$; $(-2)^2 = 4$; $(-2)^3 = -8$; $(-2)^4 = 16$
$(-3)^1 = -3$; $(-3)^2 = 9$; $(-3)^3 = -27$; $(-3)^4 = 81$

Postřehy:
$\Rightarrow$ umocňováním kladného čísla, získám vždy kladné číslo
$\Rightarrow$ umocňováním záporného čísla na lichý exponent, získám vždy záporné číslo
$\Rightarrow$ umocňováním záporného čísla na sudý exponent, získám vždy kladné číslo

Ověření:

- umocňováním kladného čísla, získám vždy kladné číslo
  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n-\text{krát}}$ - součin kladných čísel $\Rightarrow$ výsledek je kladný
- umocňováním záporného čísla na lichý exponent, získám vždy záporné číslo
  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n-\text{krát (lichý počet)}} = \underbrace{a \cdot a} \cdot \underbrace{a \cdot a} \cdot \underbrace{...} \cdot a$ - čísla v součinu jsem rozdělil do dvojic, jednotlivé dvojice dají kladná čísla, jedno *a* zbude (je jich lichý počet) $\Rightarrow$ výsledek je záporný
- umocňováním záporného čísla na sudý exponent, získám vždy kladné číslo
  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n-\text{krát (sudý počet)}} = \underbrace{a \cdot a} \cdot \underbrace{a \cdot a} \cdot \underbrace{... \cdot a}$ - čísla v součinu jsem rozdělil do dvojic, jednotlivé dvojice dají kladná čísla, žádné *a* nezbude (je jich sudý počet) $\Rightarrow$ výsledek je kladný

Znaménka mocnin:

- $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ (libovolný exponent) $\Rightarrow$ $a^n > 0$
- $a < 0$, $n = 2k$ (sudý exponent) $\Rightarrow$ $a^n > 0$ $(-2)^4 = 16$

- $a<0$, $n=2k+1$ (lichý exponent) $\Rightarrow$ $a^n<0$ $\quad (-2)^3=-8$

Pedagogická poznámka: Myslím, že je velice vhodné nechat studenty, aby se trápili sami. I strategie, se kterou zkouší mocniny (a vybírají si čísla na umocňování) je důležitá a je možné ji korigovat během jejich samostatné práce. Při zkontrolování je pak dobré zmínit, že na zkoušení vybíráme čísla „rozdílná", zkouška na příkladech není důkaz.

Př. 3: Spočti mocniny: a) 6^1 b) $(-2)^4$ c) -2^2 d) $(-2)^5$ e) $-\left(-3^2\right)$ f) $\left(\frac{1}{10}\right)^3$

g) 0^{1415} h) 1^{2007} i) -1^{1918} j) $(-1)^{1620}$

a) $6^1=6$ b) $(-2)^4=16$ c) $-2^2=-4$ d) $(-2)^5=-32$

e) $-\left(-3^2\right)=-(-9)=9$ f) $\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{1000}$

g) $0^{1415}=0$ h) $1^{2007}=1$ i) $-1^{1918}=-1$ j) $(-1)^{1620}=1$

Pedagogická poznámka: Pokud někdo udělá chybu, vždy se snažím, aby si uvědomil, že správné řešení přímo vyplývá z dodržení pravidla $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n-\text{krát}}$. Cílem, je, aby studenti uvědomili, že existuje poměrně malé množství základních pravidel, které je nutné za všech okolností dodržovat (a to vede ke správnému výsledku) a jejich nedodržování ústí v chyby (a jejich chyby měly stejný prapočátek).
Poslední čtyři body předchozího příkladu jsou zároveň opakováním dějepisu. Letopočet 2007 připomíná rok, ve kterém jsem se stal matikářem 4B2011, a je určen k nahrazení.

Př. 4: Vypočti: a) $2^2-(-2)^3+2\cdot 2^2-(-4)^2$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-4^2\right)\cdot(-3)^2$.

a) $2^2-(-2)^3+2\cdot 2^2-(-4)^2=4-(-8)+2\cdot 4-16=4$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-4^2\right)\cdot(-3)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-16)(9)=-\frac{16}{8}\cdot 9=-18$

Pedagogická poznámka: Pozor při výpočtu bodu b) postupují někteří studenti zbytečně složitě: $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-4^2\right)\cdot(-3)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-16)(9)=-\frac{144}{8}=-18$. Tento postup není zas takovým zdržením, pokud mají k dispozici kalkulačku. Pokud ne (a já jim pro tyto výpočty kalkulačky zakazuji, protože bez nich je počítání rychlejší a studenti získávají odhad čísel), jde o značné zdržení. Zdržení je navíc zbytečné, protože logické je nejdřív krátit a pak teprve násobit. Více o logice úprav v hodině *1603 KISS*.

Př. 5: Příklady 1 a 2 sbírka.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad odkazuje na sbírku příkladů, kterou studentům rozdávám. Slouží k tomu, aby Ti rychlejší měli, co dělat. S celou třídou se těmito příklady nezdržujeme, pomalejší si je musí povinně vypočítat doma.

Pravidla pro počítání s mocninami

Pro každé $a \in R$ a $r, s \in N$ platí: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ **.**

Důkaz: $a^r \cdot a^s = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a....a}_{r-\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a....a}_{s-\text{krát}}}_{(r+s)-\text{krát} \Rightarrow a^{r+s}} = a^{r+s}$

Př. 6: Zapiš jedinou mocninou:

a) $2^3 \cdot 2^4 =$ b) $(-3)\cdot(-3)^5 =$ c) $4 \cdot 2^4 \cdot (-2) =$

d) $(-2^4)\cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot (-2)^3 =$ e) $a^2 \cdot a^4 \cdot (-a)^3 =$

f) $(b-c)^2 \cdot (c-b)^4 =$

a) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

b) $(-3)\cdot(-3)^5 = (-3)^6 = 3^6$ šestka je sudá,výsledek je kladný

jiný postup $(-3)\cdot(-3)^5 = -3^1 \cdot (-3^5) = 3^{1+5} = 3^6$

c) $4 \cdot 2^4 \cdot (-2) = 2^2 \cdot 2^4 \cdot -2 = -2^{2+4+1} = -2^7$

d) $(-2^4)\cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot (-2)^3 = -2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot (-2^3) = 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^{4+3+2+3} = 2^{12}$

e) $a^2 \cdot a^4 \cdot (-a)^3 = -a^2 \cdot a^4 \cdot a^3 = -a^{2+4+3} = -a^9$

f) $(b-c)^2 \cdot (c-b)^4 = (b-c)^2 \cdot [-(b-c)]^4 = (b-c)^2 \cdot (b-c)^4 = (b-c)^6$

Pedagogická poznámka: Při počítání předchozího příkladu je třeba ohlídat, aby studenti nedávali dohromady mocniny s různými základy (někteří se na to zeptají, někteří to rovnou zkazí). V první fázi nikdy neříkám, v čem je chyba, jenom ji ukážu a připomenu, aby si pořádně přečetli rámeček se vzorcem.

Př. 7: Zjednoduš:

a) $(a^3)^2 + (-a^2)^3 + 2a^5 - a^2a^3 =$

b) $3(-a^3)^2 + 2(-a^2)^3 + 2a^5 - (-a)^2 a^3 + 3a \cdot a^4 + a^2 (-a)^3 \cdot 3a =$

c) $b^6 \cdot b + (-b^2)^3 + 2(-b)^3 \cdot b^4 + (-b)^7 : b^2 =$

a)

$(a^3)^2 + (-a^2)^3 + 2a^5 - a^2a^3 = a^6 - a^6 + 2a^5 - a^5 = a^5$

b)

$$3\left(-a^3\right)^2+2\left(-a^2\right)^3+2a^5-\left(-a\right)^2a^3+3a\cdot a^4+a^2\left(-a\right)^3\cdot 3a=$$
$$=3a^6-2a^6+2a^5-a^2a^3+3a^5-3a^2a^3a=a^6+2a^5-a^5+3a^5-3a^6=-2a^6+4a^5$$

c)

$$b^6\cdot b+\left(-b^2\right)^3+2\left(-b\right)^3\cdot b^4+\left(-b\right)^7:b^2=b^7-b^6-2b^7-b^7:b^2=$$
$$=-b^7-b^6-\frac{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot \cancel{b}\cdot \cancel{b}}{\cancel{b}\cdot \cancel{b}}=-b^7-b^6-b^5$$

Pedagogická poznámka: Snažím se zařídit, aby všichni zkusili vyřešit bod c) v předcházejícím příkladě. je zajímavé studenty sledovat, jak si poradí s něčím, co ještě neprobírali. Určitě si nikdo bude stěžovat, že vzorec pro dělení mocnin jsme ještě neměli, chci po nich, aby si přesto zkusili poradit. Na příkladě toho, že to jde se snažím ukázat, že ve chvílích, kdy si nejsme jisti půdou pod nohama, je zvlášť důležité vědět, co vlastně věci znamenají.

Vzoreček slíbím na příští hodinu, vždy se najde někdo ho stejně odhalí.

Př. 8: Příklad 3 sbírka.

Př. 9: Petáková:
strana 62/cvičení 37 a)

Shrnutí: $a^3=a\cdot a\cdot a$ a z toho je všechno jasné.