

1.5.3 Znaky dělitelnosti

Předpoklady: 1501, 1502

Větší část hodiny je opakování ze základní školy.

Dělitelnost 2, 5, 10

Př. 1: Vyslov pravidla při dělitelnost přirozených čísel 2, 5 a 10.

Přirozené číslo je dělitelné:

10, právě když jeho zápis končí nulou.

5, právě když jeho zápis končí nulou nebo pětkou.

2, právě když je poslední číslice jeho zápisu dělitelná 2.

Nástin důkazu:

všechny předchozí pravidla, závisí pouze na poslední číslici libovolné trojmístné číslo abc

$$abc = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 10(a \cdot 10 + b) + c$$

první část je dělitelná 10, 5, 2 \Rightarrow záleží na c

$c = 0 \Rightarrow$ je dělitelné 10

$c = 0, 5 \Rightarrow$ je dělitelné 5

$c = 0, 2, 4, 6, 8 \Rightarrow$ je dělitelné 2

Dělitelnost 4, 20, 25, 50, 100

Př. 2: Vyslov pravidla při dělitelnost přirozených čísel 4, 20, 25, 50 a 100.

Přirozené číslo je dělitelné:

4, právě když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné 4.

20, právě když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné 20.

25, právě když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné 25.

50, právě když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné 50.

Nástin důkazu:

všechny předchozí pravidla, závisí pouze na posledním dvoučíslí \Rightarrow zřejmě podobný případ jako předchozí pravidla.

libovolné čtyřmístné číslo $abcd$

$$abcd = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = 100(a \cdot 10 + b) + c \cdot 10 + d$$

první část je dělitelná 4, 20, 25, 50 \Rightarrow záleží na posledním dvojčíslí cd

cd je dělitelné 4 \Rightarrow celé číslo je dělitelné 4

cd je dělitelné 20 \Rightarrow celé číslo je dělitelné 20

cd je dělitelné 25 \Rightarrow celé číslo je dělitelné 25

cd je dělitelné 50 \Rightarrow celé číslo je dělitelné 50

cd je dělitelné 100 \Rightarrow celé číslo je dělitelné 100

Dělitelnost 8

Př. 3: Navrhni pravidlo pro dělitelnost 8. Která čísla budou mít podobná pravidla?

Podobně jako u 4, jenom je potřeba 1000, který je dělitelný 8.

$$abcde = a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e =$$

$$1000(a \cdot 10 + b) + cde$$

První část dělitelná 8 \Rightarrow záleží na cde

Přirozené číslo je dělitelné 8, právě když jeho poslední trojčíslí je dělitelné 8.

Která čísla mají podobné pravidlo?

Pravidlo pro 4, 20, 25, 50 a 100: vytýkal jsem stovku (platí $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$) \Rightarrow na posledním dvojčíslí záleželo u čísel, která se dají sestavit ze stejných čísel jako stovka (pak bude stovka jimi dělitelná)

\Rightarrow pravidlo pro dělitelnost pomocí posledního trojčíslí platí u čísel, která je možné sestavit ze součinů z čísel $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, tedy čísla 40, 200, 125, 250, 500.

Pravidlo pro dělitelnost 8 je v praxi většinou k ničemu, málokdy počítáme s čísly většími než 1000 bez kalkulačky.

Dělitelnost 3 a 9

Př. 4: Vyslov pravidla při dělitelnost přirozených čísel 3 a 9.

Přirozené číslo je dělitelné 3, právě když je jeho ciferný součet dělitelný 3.

Přirozené číslo je dělitelné 9, právě když je jeho ciferný součet dělitelný 9.

Proč?

7842, ciferný součet $7 + 8 + 4 + 2 = 21 \Rightarrow$ dělitelné třemi, není dělitelné 9

$$7842 = 7 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 = 7 \cdot (999 + 1) + 8 \cdot (99 + 1) + 4 \cdot (9 + 1) + 2$$

roznásobím závorky

$$7842 = 7 \cdot 999 + 8 \cdot 99 + 4 \cdot 9 + 7 + 8 + 4 + 2$$

dělitelné 3 a 9 ciferný součet

Obecně pro čtyřmístná čísla:

$$abcd = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = a \cdot (999 + 1) + b \cdot (99 + 1) + c \cdot (9 + 1) + d =$$

$$a \cdot 999 + a + b \cdot 99 + b + c \cdot 9 + c + d = 9(a \cdot 111 + b \cdot 11 + c) + a + b + c + d$$

první část dělitelná 3 i 9 \Rightarrow záleží na druhé (ciferný součet)

Př. 5: Najdi pravidlo určující dělitelnost trojmístných čísel sedmi (inspiruj se nástinem důkazu pravidlo pro dělitelnost třemi a devíti)

základem pravidla pro dělitelnost 3 a 9 je rozdělení mocnin deseti z rozvinutého zápisu čísla na násobky devíti (co největší) a zbytek (co nejmenší).

$$abc = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = a(98 + 2) + b(7 + 3) + c$$

100 a 10 rozdělím na největší násobek sedmi a zbytek, závorky roznásobím

$$abc = 98 \cdot a + 7 \cdot b + 2 \cdot a + 3 \cdot b + c$$

dělitelné sedmi pravidlo

\Rightarrow Číslo je dělitelné 7, právě když součet dvojnásobku počtu stovek, trojnásobku počtu desítek a počtu jednotek je dělitelný 7.

Pravidlo pouze pro trojciferná čísla, je dlouhé a složité. Čím více cifer, tím delší pravidlo
⇒ proto se pravidlo pro dělitelnost 7 neuvádí.

Dělitelnost 6, 12, 15

Př. 6: Vyslov pravidla při dělitelnost přirozených čísel 6.

Přirozené číslo je dělitelné 6, právě když je dělitelné 2 a 3.

Př. 7: Zdůvodni, proč neplatí pravidlo: Přirozené číslo je dělitelné 8, právě když je dělitelné 4 a 2.

$6 = 2 \cdot 3$, 2 a 3 jsou nesoudělná čísla, dělitelnost jedním neznamená dělitelnost druhým
Čísla 4 a 2 jsou soudělná. Když je číslo dělitelné 4, tak víme, že je dělitelné 2, poznatek o dělitelnosti dvojkou nepřináší nic nového ani žádné omezení.

Př. 8: Vyslov pravidla při dělitelnost přirozených čísel 12, 15 a 18.

Přirozené číslo je dělitelné 12, právě když je dělitelné 3 a 4. (nemohu používat 6 a 2, protože jsou to soudělná čísla).

Přirozené číslo je dělitelné 15, právě když je dělitelné 3 a 5.

Přirozené číslo je dělitelné 18, právě když je dělitelné 2 a 9. (nemohu používat 6 a 3, protože jsou to soudělná čísla).

Př. 9: U následujících čísel urči zda jsou dělitelné některým z čísel: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12 a 15:

- a) 297
- b) 3460
- c) 3162
- d) 70010
- e) 7555
- f) 505984

a) 297

poslední cifra 7 ⇒ není dělitelné 2, 4, 5, 6, 10, 12 a 15

ciferný součet 18 ⇒ je dělitelné 3 a 9

b) 3460

poslední cifra 0 ⇒ dělitelné 2, 5, 10

poslední dvojčíslí 60 ⇒ dělitelné 4

ciferný součet 13 ⇒ není dělitelné 3 a 9 ⇒ není dělitelné 12 a 15

c) 3162

poslední cifra 2 ⇒ dělitelné 2

⇒ není dělitelné 5, 10, 15

poslední dvojčíslí 62 ⇒ není dělitelné 4, 12

ciferný součet 12 ⇒ je dělitelné 3, není dělitelné 9

d) 70010

poslední cifra 0 ⇒ dělitelné 2, 5, 10

poslední dvojčíslí 62 \Rightarrow není dělitelné 4, 12

ciferný součet 8 \Rightarrow není dělitelné 3 a 9 \Rightarrow není dělitelné 12 a 15

e) 7555

poslední cifra \Rightarrow dělitelné 5

\Rightarrow není dělitelné 2, 10, 4, 12

ciferný součet 22 \Rightarrow není dělitelné 3 a 9 \Rightarrow není dělitelné 15

f) 505984

poslední cifra 4 \Rightarrow dělitelné 2

\Rightarrow není dělitelné 5, 10, 15

poslední dvojčíslí 84 \Rightarrow dělitelné 4

ciferný součet 31 \Rightarrow není dělitelné 3 a 9 \Rightarrow není dělitelné 12

Shrnutí: Znaky dělitelnost čísel úzce souvisí s rozvinutým zápisem čísla v desítkové soustavě.