

1.5.1 Číselné soustavy

Předpoklady: základní početní operace

Pedagogická poznámka: Tato hodina není součástí klasické gymnaziální sady. Upřímně řečeno nevím proč. Jednak se všichni studenti určitě setkávají s pojmem binární (dvojkové) číselné soustavy, většina z nich potká i čísla v hexadecimální soustavě (například RGB barvy na pozadí www stránek. Navíc jde o krásnou ukázkou algoritmů založených na poměrně jednoduché myšlence a fungujících za všech podmínek bez ohledu na základ číselné soustavy.

Dříve se čísla psala pomocí čárek, nebo i jiných znaků:

$$||| = 3$$

⇒ problém u větších čísel.

Co je ? ||||| - 33, ale strašně špatně se to čte

⇒ potřeba seskupovat čísla do skupin, abych číslo snadněji přečetl

Zapisování piv v hospodě do skupin po pěti: ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||| ⇒ $3 \cdot 5 + 3 = 18$

Dnes zapisujeme čísla pomocí skupin založených na mocninách 10 (**desítková číselná soustava**)

21 neznamená $2 + 1 = 3$

ale

$$21 = 2 \cdot 10 + 1 \cdot 1 = 20 + 1 = 21 \quad = \text{rozvinutý zápis čísla}$$

Význam číslice záleží na pozici, ve které se nachází, nuly uvnitř čísla jsou důležité:

$$830 = 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 0 \cdot 1$$

$$803 = 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 8 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

$$83 = 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 8 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

Poznámka: Pro každé $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ platí: $x^0 = 1$. Proč si řekneme později.

Dodatek: Námí používaný způsob zápisu se někdy označuje jako plný poziční systém – význam každé číslice je určen její pozicí v čísle. Není možné sestavit takový systém bez nuly. Právě protože Římané nulu nepoužívali je systém římských číslic z dnešního pohledu těžkopádný a nepřehledný (například pro 5, 50 i 500 se používají různé znaky).

Pedagogická poznámka: Následující příklad je pro velkou většinu studentů zbytečný, ale těch několik se bez něj skoro neobejde.

Př. 1: Zapiš rozvinutý zápis čísel: 12054, 12504 a 7305049 v desítkové soustavě.

$$12054 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

$$12504 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

$$7305049 = 7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

Jako základ mocnin nemusím používat jen 10.

⇒ pokud není jasné, že číslo je uvedeno v desítkové soustavě, píšeme jej takto: $(12054)_{10}$.

Pedagogická poznámka: Upozorněte studenty, že v následujících příkladech jde pochopení jednoduchého stále se opakujícího postupu. Ať si otestují svou schopnost pochycení algoritmu.

Dvojková (binární) soustava

používám mocniny 2 (použití v počítačích)

$$2^0 = 1$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32 \text{ atd.}$$

Co znamená $(1010)_2$? Zkusím napodobit číslo $(1010)_{10}$.

Desítková soustava ⇒ základem jsou mocniny desítky

$$(1010)_{10} = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 1000 + 0 + 10 + 0 = 1010$$

Dvojková soustava ⇒ základem jsou mocniny dvojky

$$(1010)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 10$$

⇒

- význam číslic 1010 závisí na použité číselné soustavě
- systém vyjadřování čísel je ve dvojkové soustavě stejný jako v soustavě desítkové

Př. 2: Zapiš rozvinutý zápis čísla ve dvojkové soustavě $(101)_2$ a převed' jej do desítkové soustavy.

$$(101)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$$

Př. 3: Převed' čísla z dvojkové soustavy do desítkové:

a) $(1111)_2$

b) $(10010)_2$

c) $(1011101)_2$

a) $(1111)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$

b) $(10010)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 2 = 18$

c) $(1011101)_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 16 + 8 + 4 + 1 = 93$

Jak převést číslo obráceně (z desítkové do dvojkové)?

Zkusím 5 (vím už, jak to vyjde)

Skupiny, které mám k dispozici:

$$2^0 = 1$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32 \text{ atd.}$$

Hledám největší, kterou obsahuje i číslo 5, je to skupina 4.

$$\text{Platí } 5 = 4 + 1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1^0.$$

Do rozvoje musím doplnit i $0 \cdot 2^1$ (nuly mají v čísle význam)

$$5 = 4 + 1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1^0 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1^0 = (101)_2$$

Př. 4: Převeď čísla z desítkové soustavy do dvojkové:

a) $(11)_{10}$

b) $(32)_{10}$

c) $(29)_{10}$

a) $(11)_{10} = 8 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (1011)_2$

b) $(32)_{10} = 32 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (100000)_2$

c) $(29)_{10} = 16 + 8 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11101)_2$

Pedagogická poznámka: Existují i efektivnější dělicí algoritmy. Bohužel z nich není tak snadno vidět, o co při převádění čísel do různých číselných soustav jde. Protože cílem hodin je ukázat, jak funguje převádění čísel do různých soustav, a ne naučení nejefektivnějšího převáděcího algoritmu z desítkové soustavy do soustavy dvojkové, tento algoritmus nezmiňujeme.

Postřeh: Ve všech zápisech čísel ve dvojkové soustavě se vyskytují pouze 1 a 0. Asi nejde o náhodu. Proč to tak je?

V rozvoji nemůže být například $2 \cdot 2^3$, protože platí $2 \cdot 2^3 = 2^4$ (2^4 je větší skupina) \Rightarrow kdybych měl jakoukoliv skupinu dvakrát, získám tím skupinu větší, protože preferuji používání co největších skupin \Rightarrow **Na zápis čísel ve dvojkové soustavě stačí pouze dvě číslice 0 a 1** (Proto se dvojková číselná soustava používá pro reprezentaci čísel v počítačích. Číslo 1 znamená přítomnost napětí, 0 nepřítomnost napětí. Systém, kdy je nutno rozlišovat pouze dva stavy, je konstrukčně daleko jednodušší.)

Zápis v dalších soustavách je podobný.

Př. 5: Převed' do desítkové soustavy čísla:

a) $(2010)_3$

b) $(141)_5$

c) $(27)_8$

a) $(2010)_3 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 2 \cdot 27 + 1 \cdot 3 = 57$

b) $(141)_5 = 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 5^0 = 1 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 1 = 46$

c) $(27)_8 = 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 2 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = 23$

Pedagogická poznámka: Ukázka na převod z jiné než dvojkové soustavy není uvedena schválně a rovnou je zařazen příklad. Jde o to, aby si studenti uvědomili, že princip je stále stejný a nezávisí na základu používané soustavy. Stejně tak je to u následujícího příkladu. Pokud má někdo ze studentů s řešením těchto příkladů problémy, vždy se snažím o to, aby zjistil, že je to „pořád to samé“.

Př. 6: Převed' číslo $(61)_{10}$ z desítkové soustavy do soustavy trojkové.

Skupiny, které mám k dispozici:

$$3^0 = 1$$

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

největší skupina, kterou je možné sestavit z 61 je skupina 27, která se vyskytuje dvakrát \Rightarrow

$$61 = 2 \cdot 27 + 7 \Rightarrow$$

Musím rozdělit ještě číslo 7 \Rightarrow dvě skupiny po třech a jednička.

$$61 = 2 \cdot 27 + 2 \cdot 3 + 1 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = (2021)_3$$

Pedagogická poznámka: Během jedné hodiny dokážeme dojít přibližně k následujícímu příkladu. Zadávám ho jako domácí úkol.

Je zajímavé, že i když o hodině třída dokázala převádět bez problémů, domácí úkol většina neudělá \Rightarrow je možné popovídat si se studenty o tom, jak se vlastně snaží zapamatovat si věci, jestli to vůbec dělají a co si vlastně snažili zapamatovat.

Není to zbytečné, paměť je minimálně stejně významným důvodem neúspěchu v matematice, jako „logické myšlení“. Při předposledním probírání totiž dokázala ve škole počítat zcela samostatně příklady 5 a 6 celá třída. Domácí úkol pak udělala pouze třetina z nich. Ani jeden si nenapsal poznámky, které by nějak usnadňovaly opětovné pochopení (nikdo z nich neuvažoval nad tím, co mu umožnilo převádění pochopit).

Zajímavé (a zároveň depresivní) je i to co se snaží studenti zapamatovat. Většinou jde o úplné algoritmy včetně mocnin dvou nebo tří, často podstatně složitější a konkrétnější než vysvětlení, kterého se jim dostalo ode mě.

Přimlouval bych se, za následující postup:

Zadat příklad 7 za domácí úkol.

Prodiskutovat se studenty důvody případných problémů při jeho výpočtu.

Zkusit zformulovat nějaká pravidla na zapamatování (je to sice práce pro každého zvlášť, ale podle něčeho se to studenti naučit musí).

Převést číslo do desítkové soustavy znamená napsat rozvinutý tvar s patřičnou mocninou a dopočítat ho.

Převést číslo z desítkové soustavy do jiné znamená vytvářet skupiny o počtech, které odpovídají základu soustavy.

Př. 7: Převeď čísla z desítkové soustavy do naznačené číselné soustavy:

a) $(21)_{10} = (\quad)_3$

b) $(38)_{10} = (\quad)_3$

c) $(84)_{10} = (\quad)_8$

a) $(21)_{10} = (\quad)_3$

Skupiny, které mám k dispozici:

$$3^0 = 1$$

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$(21)_{10} = 9 + 9 + 3 = 2 \cdot 9 + 1 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = (210)_3$$

b) $(38)_{10} = (\quad)_3$

Skupiny, které mám k dispozici:

$$3^0 = 1$$

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$(38)_{10} = 27 + 9 + 2 = 1 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 1 = 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = (1102)_3$$

c) $(84)_{10} = (\quad)_8$

Skupiny, které mám k dispozici:

$$8^0 = 1$$

$$8^1 = 8$$

$$8^2 = 64$$

$$(84)_{10} = 64 + 8 + 8 + 4 = 1 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 1 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = (124)_8$$

Kolik číslic budeme potřebovat pro zápis čísel ve trojkové soustavě?

Podobně jako u dvojkové stačí dvě číslice, stačí v trojkové pouze tři ($3 \cdot 3^2 = 3^3$ větší skupina).
⇒ základ číselné soustavy nám zároveň udává i počet číslic, potřebných zápisu čísel v této soustavě.

Šestnáctková (hexadecimální) soustava

⇒ potřeba 16 číslic ⇒ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f ($a=10$, $b=11 \dots$)

Př. 8: Převeď číslo $(2E)_{16}$ ze šestnáctkové do desítkové soustavy.

$$(2e)_{16} = 2 \cdot 16^1 + 14 \cdot 1 = 46$$

Př. 9: Převeď číslo $(63)_{10}$ z desítkové do šestnáctkové soustavy.

$$(63)_{10} = 3 \cdot 16 + 15 = (3f)_{16}$$

Poznámka: Se šestnáctkovou soustavou setkáváme například při zápisu barev v html kódu (kód RGB například (E5, 78, FF), nebo u MAC adres (celosvětově jedinečný identifikátor) síťových karet.

Dodatek: Šestnáctková číselná soustava se používá stejně jako dvojková ve výpočetní technice. Ne však k přímému zápisu čísel uvnitř počítačů, ale jako soustava, která s malým počtem číslic umožňuje zapsat potřebné konstanty ve tvaru umožňujícím přímý a rychlý převod do dvojkové soustavy.

Platí totiž:

$$\begin{aligned}(11011101)_2 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1) \cdot 2^4 + (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1) \cdot 2^0 = \\ &= (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1) \cdot 16^1 + (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1) \cdot 16^0\end{aligned}$$

Vždy čtyři cifry čísla ve dvojkové soustavě odpovídají jedné cifře čísla v šestnáctkové soustavě.

Shrnutí: Při zápisu čísel využíváme jejich rozdělení na skupiny, které jsou postaveny na mocninách čísla, označeného jako základ soustavy.