1.4.6 Stavba matematiky, důkazy

Předpoklady: 1401, 1404

Pedagogická poznámka: Tato hodina se velmi liší od většiny ostatních neboť jde v podstatě o přednášku. Také ji neprobíráme v prvním ročníku, ale přednáším ji (vyjde téměř na dvě hodiny) až maturantům před maturitou. V prvním ročníku si pouze přibližně řekneme, co slova jako důkaz nebo axiom znamenají.

Matematické vyjadřování musí být přesné a jednoznačné $\Rightarrow$ jsou stanovena jasná pravidla, jak formulovat a objevovat matematická pravidla.

Definice

– vymezení pojmu pomocí základních pojmů nebo pojmů definovaných dříve. Neříkají nic nového, jen zkracují vyjadřování.
Například: Prvočíslo je číslo dělitelné pouze jedničkou a sebou samým.
Problém: Jak vysvětlit základní pojmy (co je číslo?), je nutné znát význam pojmů definovaných dříve (co znamená je dělitelné?).

Axiom

– tvrzení (výrok), které považujeme za pravdivé
dříve proto, že se „zdálo samozřejmé“, dnes proto, že jsme „si ho zvolili a zkoumáme, co to udělá“
Například: Každým bodem roviny lze s danou přímkou vést právě jednu rovnoběžku (legendární pátý Euklidův postulát).
Poznámky:

- I na první pohled divné axiomy se mohou ukázat užitečné v reálném světě (neeuklidovské geometrie)
- Na tom, jaký si vyberu soubor axiomů a základních pojmů, závisí jakou část matematiky dostanu.
- Není možné si vybrat všechno jako axiom. Soubor axiomů by měl být, co nejmenší a musí být bezesporný (axiomy si nesmí navzájem odporovat).

Matematická věta

- tvrzení (výrok), který jsme sestavili z pojmů a který nepatří mezi axiomy $\Rightarrow$ musíme se přesvědčit o jeho pravdivosti (**dokázat ho**).
Poznámka: V každé matematické teorii lze sestavit věty, které není možno pomocí původní sady axiomů dokázat (rozhodnout o jejich pravdivosti) bez toho, abych přidali další axiom (čím sice problematickou větu dokážeme, ale opět přibudou další zformulovatelné věty a vracíme se na začátek).
Poznámka: Toto je principiální rozdíl mezi matematikou a přírodními vědami. V matematice víme (díky důkazům a díky výběru axiomů), co je pravda a co ne. V přírodních vědách neznáme správné řešení (možná dokonce ani neexistuje) a vše, co v každém okamžiku víme, je pouhé přiblížení jehož vhodnost nelze dokázat, ale pouze ji podpořit nebo ji vyvrátit.

Důkaz

- úvaha, která zdůvodňuje platnost matematické věty. $\Rightarrow$ pro různé druhy matematických vět (výroků), existují různé druhy důkazů.

Poznámka:
Ve zbytku článku budu značit větu (výrok), kterou chci dokázat jako ***v***.
Ve zbytku článku budu používat klasickou tabulku pravdivostních hodnot implikace

a	***b***	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Jeden z výroků budu často značit ***v*** podle toho, který zrovna dokazuji.

1. Důkazy matematických vět, které mají tvar elementárního výroku

- „jednoduché věty, bez spojek“

Příklady:

- Součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$.
- $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Dvě hlavní metody:

1. a) Přímý důkaz věty mající tvar elementárního výroku.

Princip důkazu vychází z tabulky pravdivostních hodnot implikace:

a	***v***	$a \Rightarrow v$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Mám výrok ***v***: „Součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$.“
Postup důkazu:
Najdu pravdivý výrok ***a*** (mezi axiomy nebo mezi již dokázanými výroky), vystavím od výroku ***a*** pravdivou implikaci (cestu) k výroku ***v*** (tedy najdu pravdivý výrok $a \Rightarrow b$)
Vím, že v tabulce pravdivostních hodnot implikace $a \Rightarrow v$ se nacházím v červeném řádku (je jediný s jedničkou v prvním a třetím sloupci)
V červeném řádku se podívám do druhého sloupce, je zde 1 a tedy výrok ***v*** je nutně pravdivý a tedy dokázaný.

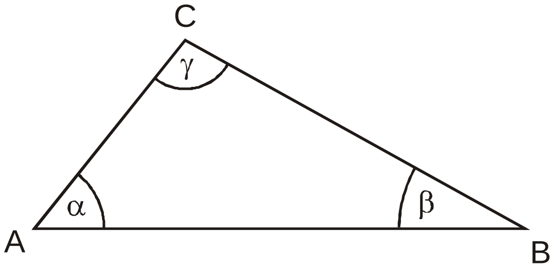
Poznámky:

- Většinou se implikace $a \Rightarrow v$ nedá ukázat přímo, ale pouze postupně pomocí řetězce implikací: $a \Rightarrow b_1$**,** $b_1 \Rightarrow b_2$**,** $b_2 \Rightarrow b_3$**, …** $b_{n-1} \Rightarrow b_n$**,** $b_n \Rightarrow v$**)**
- Není možné dokázat pravdivost výroků tím, že z něj odvodíme pravdivý výrok (věděli bychom, že platí ***b*** a $v \Rightarrow b$**,** tedy, že máme jedničku v druhém a třetím sloupci, takové řádky jsou v tabulce dvě a mají různé pravdivosti v prvním řádku.
- Při konstrukci důkazu bývá velkým problémem zvolit vhodně výchozí výrok, aby bylo možné odvozováním dojít k požadované větě.

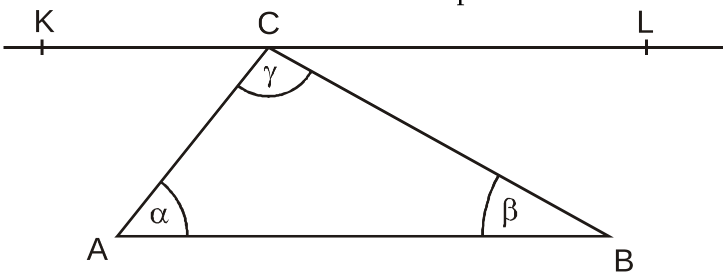
Př. 1: Dokaž větu: „Součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$.“

Mám výrok ***v***: „Součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$.“
Hledám vhodný výrok ***a***.

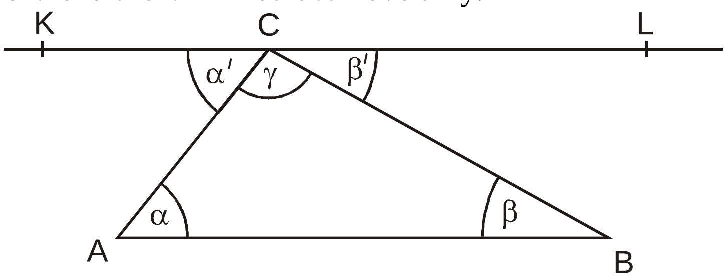
Mám libovolný trojúhelník *ABC*:



Zvolím výrok ***a***: Každým bodem v rovině lze vést pouze jednu rovnoběžku s danou přímkou.
Povedu bodem *C* rovnoběžku *KL* s přímkou *AB*.



Následuje odvozování (sled výroků $a \Rightarrow b_1$, $b_1 \Rightarrow b_2$, $b_2 \Rightarrow b_3$, ... $b_{n-1} \Rightarrow b_n$, $b_n \Rightarrow v$).
U vrcholu *C* vzniknou dva nové úhly.



Podle věty o rovnoběžkách proťatých přímkou platí: $\alpha' = \alpha$ a $\beta' = \beta$ (střídavé úhly).
Úhel $\measuredangle KCL$ je přímý, platí $180° = \alpha' + \gamma + \beta' = \alpha + \gamma + \beta$.
Trojúhelník *ABC* jsme zvolili libovolně, podařilo se nám dojít až k výroku $b_n \Rightarrow v$ a tím dokázat pravdivost výroku ***v***.

1. b) Důkaz sporem věty mající tvar elementárního výroku

a	***b***	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Vyjdeme ze čtvrtého řádku, platí-li implikace $a \Rightarrow b$ (vyvozuji správně) a neplatí-li výrok ***b***, mám ve druhém sloupci 0 a ve třetím 1 a tedy jsem ve čtvrtém řádku tabulky a neplatí tedy ani výrok ***a***.
Tabulku upravím takto:

$\neg v$	***b***	$a \Rightarrow b$	v
1	1	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Místo výroku ***a*** použiju negaci výroku ***v***, pokud dokážu, že tato negace je nepravdivá, znamená to, že původní výrok ***v*** je pravdivý.

Postup důkazu:

- Vytvořím negaci $\neg v$ požadovaného výroku ***v***.
- Pravdivě z tohoto výroku dokazuji až dojdu k nesmyslnému výroku ***b***.
- Nacházím se ve čtvrtém řádku a tedy výrok $\neg v$ je nepravdivý.
- Výrok ***v*** je pravdivý.

Př. 2: Dokaž větu: „Šachovnici 8x8, ze které je vystřiženo levé dolní a pravé horní políčko, nelze pokrýt 31 obdélníky 2x1." (Pokrytím rozumíme takové umístění obdélníčků na šachovnici, aby každé její pole bylo přikryto právě jedním ze dvou čtverců obdélníčku 2x1.)

Mám výrok ***v***: „Šachovnici 8x8, ze které je vystřiženo levé dolní a pravé horní políčko, nelze pokrýt 31 obdélníky 2x1."
Musím vycházet z negace $\neg v$ dokazovaného výroku: „Šachovnici 8x8, ze které je vystřiženo levé dolní a pravé horní políčko, lze pokrýt 31 obdélníky 2x1."
Snažím se z negace dovodit spor (zřejmý nesmysl).

Obdélník 2x1 pokryje vždy jedno černé a jedno bílé políčko $\Rightarrow$ 31 obdélníků pokryje 31 bílých a 31 černých políček $\Rightarrow$ na šachovnici s vystřiženými políčky je stejně černých i bílých políček = **spor**, protože ze šachovnice jsme vystřihli dvě políčka na stejné úhlopříčce, tedy se stejnou barvou.
Z negovaného výroku $\neg v$ jsme odvodili zjevný nesmysl $\Rightarrow$ výrok $\neg v$ je nepravdivý $\Rightarrow$ výrok ***v*** je pravdivý.
Dokázali jsme větu: „Šachovnici 8x8, ze které je vystřiženo levé dolní a pravé horní políčko, nelze pokrýt 31 obdélníky 2x1."

Poznámka:
Některé matematické teorie používají logiku, která zakazuje použití důkazu sporem.

2. Důkazy matematických vět, které mají tvar implikace

- souvětí typu: „Jestliže …., pak…."

Příklady:

- Je dána kružnice *k* s průměrem *AB*. Je-li *X* libovolný bod kružnice *k* různý od bodů *A*, *B*, pak úhel *AXB* je pravý.
- Je dán trojúhelník *ABC*. Je-li úhel *ACB* pravý, pak bod *C* leží na kružnici s průměrem *AB*.
- Pro všechna přirozená čísla *n* platí: jestliže je číslo n^2 sudé, je sudé i číslo *n*.

Výrok ***v***, který dokazujeme je složený výrok $a \Rightarrow b$, nedokazujeme tedy platnost samotných výroků *a* nebo *b*, ale pravdivost implikace („šipky" tedy vyplývání výroku *b* z výroku *a*).

Tři hlavní metody:

2. a) Přímý důkaz věty mající tvar implikace

Princip:
Mám výrok $a \Rightarrow b$ **,** nejsem si jistý pravdivostí šipky – nahradím dokazovanou implikaci řetězcem implikací: $a \Rightarrow b_1$, $b_1 \Rightarrow b_2$, $b_2 \Rightarrow b_3$, … $b_{n-1} \Rightarrow b_n$, $b_n \Rightarrow b$.

Postup důkazu:

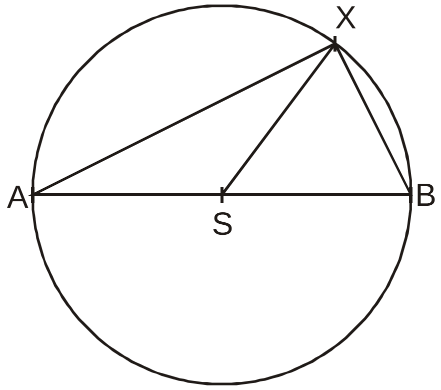
- Vezmu si výrok ***a*** a začnu z něj postupně pravdivě pomocí axiomů a již dokázaných vět vyvozovat další výroky.
- Snažím se dokazovat výroky, ze kterých by bylo možné dokázat výrok *b*.
- Pokud najdu výrok, ze kterého již vyplývá výrok *b*, podařilo se mi nahradit implikaci $a \Rightarrow b$ řetězcem implikací: $a \Rightarrow b_1$, $b_1 \Rightarrow b_2$, $b_2 \Rightarrow b_3$, … $b_{n-1} \Rightarrow b_n$, $b_n \Rightarrow b$ a tím větu dokázat.

Poznámka:
Konstrukce důkazu je oproti důkazům elementárních výroků jednodušší, protože je jasné, ze kterého výroku mám vycházet. Vycházím vždy z výroku *a*.

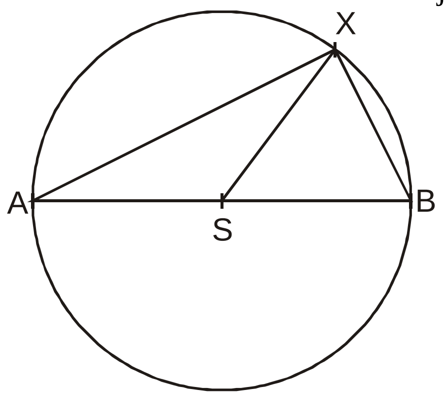
Př. 3: Je dána kružnice *k* s průměrem *AB*. Dokaž větu: „Je-li *X* libovolný bod kružnice *k* různý od bodů *A*, *B*, pak úhel *AXB* je pravý.“

Vyjdu z výroku *a*: „*X* je libovolný bod kružnice *k* různý od bodů *A*, *B*.“ a bude se snažít dojít k výroku *b*: „úhel *AXB* je pravý.“.

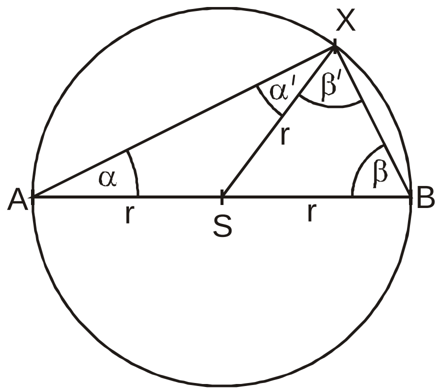
Nakreslím kružnici *k* a zvolím bod *X*. Nakreslím trojúhelník *ABX*.



Nakreslím střed *S* kružnice *k* a trojúhelníky *ASX* a *BSX*.



Trojúhelníky *ASX* a *BSX* jsou oba rovnoramenné (mají dvě strany o délce *r*) a proto platí:
$\alpha = \alpha'$´a $\beta = \beta'$.



Součet úhlů v trojúhelníku je $180°$, tedy $\alpha + (\alpha' + \beta') + \beta = \alpha' + (\alpha' + \beta') + \beta = 180°$
$2\alpha' + 2\beta' = 180°$
$\alpha' + \beta' = \measuredangle AXB = 90°$.
Věta je dokázána.

2. b) Důkaz sporem věty mající tvar implikace

Princip:
Zcela stejný, jako u důkazu sporem u elementárních výroků, pouze vytvoření negace je trochu složitější, Neguju složený výrok $a \Rightarrow b$ na $a \wedge \neg b$.

Postup důkazu:
- Vytvořím negaci $a \wedge \neg b$ požadovaného výroku $a \Rightarrow b$.
- Pravdivě z tohoto výroku dokazuji až dojdu k nesmyslnému výroku ***c***.
- Výrok $a \wedge \neg b$ je tedy nepravdivý.
- Výrok $a \Rightarrow b$ je pravdivý.

Poznámka:
Předpokladem úspěchu je správné znegování dokazovaného výroku.

Př. 4: Dokaž větu: „Pro všechna přirozená čísla *n* platí: jestliže je číslo n^2 sudé, je sudé i číslo *n*.

Určím elementární výroky v implikaci $a \Rightarrow b$ **:**
výrok *a*: číslo n^2 je sudé
výrok *b*: číslo *n* je sudé
Zneguju dokazovaný výrok $a \Rightarrow b$ na výrok $a \wedge \neg b$: číslo n^2 sudé a zároveň číslo *n* je liché.

Negaci dokončím znegováním kvantifikátoru:
„Existuje alespoň jedno přirozené číslo *n*, pro které platí: číslo n^2 sudé a zároveň číslo *n* je liché.“

Z této věty potřebuju dojít ke sporu.
Číslo *n* je liché, tedy dá se napsat ve tvaru: $n = 2k + 1$, kde *k* je celé číslo.
Pro n^2 platí: $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, to je ale spor s tvrzením, že n^2 je sudé protože číslo $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ je zjevně liché.

Vycházel jsem z nepravdivého výroku $a \wedge \neg b$, tedy původní výrok $a \Rightarrow b$ je pravdivý.

2. c) Nepřímý důkaz věty mající tvar implikace

Princip:
Implikace $a \Rightarrow b$ je ekvivalentní výrok s obměněnou implikací $\neg b \Rightarrow \neg a$.

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$a \Rightarrow b$	$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Pokud dokážeme platnost implikace $\neg b \Rightarrow \neg a$ musí platit i $a \Rightarrow b$.

Postup důkazu:
- Vytvořím obměněnou implikací $\neg b \Rightarrow \neg a$ požadovaného výroku $a \Rightarrow b$.
- Výrok $\neg b \Rightarrow \neg a$ dokáži nejčastěji přímým důkazem.
- Výrok $\neg b \Rightarrow \neg a$ je tedy pravdivý.
- Výrok $a \Rightarrow b$ je pravdivý.

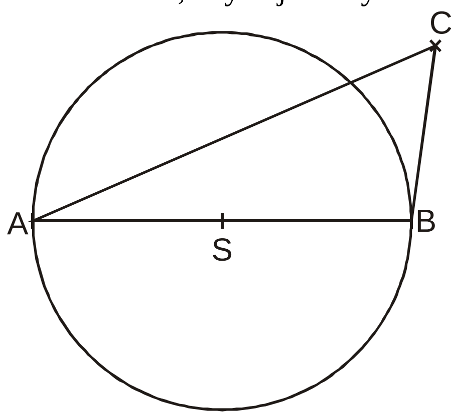
Poznámka:
Předpokladem úspěchu je správné vytvoření obměněné implikace.

Př. 5: Je dán trojúhelník *ABC*. Dokaž větu: „Je-li úhel *ACB* pravý, pak bod *C* leží na kružnici s průměrem *AB*.“

Určím elementární výroky v implikaci $a \Rightarrow b$:
výrok *a*: úhel *ACB* je pravý.
výrok *b*: bod *C* leží na kružnici s průměrem *AB*.
Obměním dokazovaný výrok $a \Rightarrow b$ na výrok $\neg b \Rightarrow \neg a$: Pokud bod *C* neleží na kružnici s průměrem *AB*, úhel *ACB* není pravý

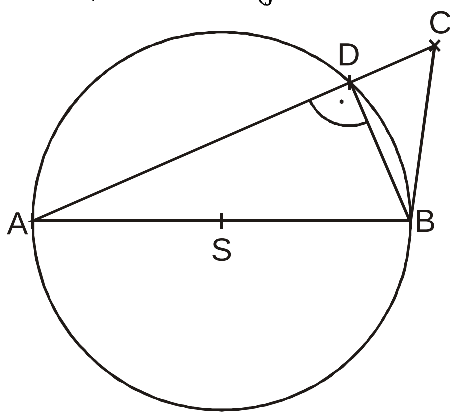
Tuto větu dokazuji.

Nakreslím trojúhelník *ABC*, kružnici s poloměrem *AB* a bod *C*, který leží vně kružnice (aby neležel mimo, zbývá ještě vyřešit možnost, že bod *C* je uvnitř kružnice).



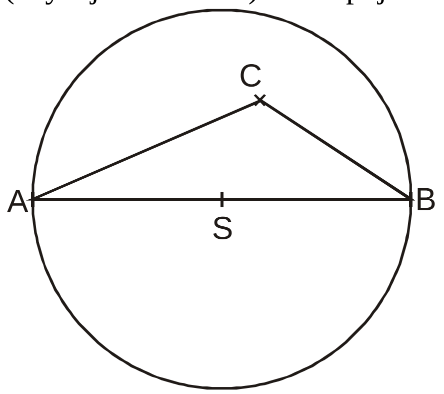
Průsečík úsečky *AC* s kružnicí *k* označím *D*.

Úhel $\measuredangle ADB = 90°$ (již dokázaná věta).

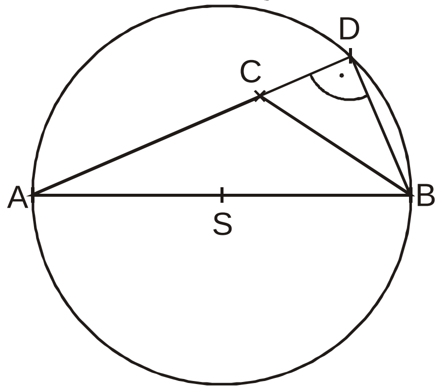


Úhel $\measuredangle BDC = 90°$ (je protější k úhlu $\measuredangle ADB = 90°$).
Úhel $\measuredangle ACB$ nemůže být pravý, protože v trojúhelníku *BDC* by byly dva pravé úhly.

Nakreslím trojúhelník *ABC*, kružnici s poloměrem *AB* a bod *C*, který leží uvnitř kružnice (zbývající možnost). Postupuju stejně jako v předchozím případě.



Průsečík úsečky *AC* s kružnicí *k* označím *D*.
Úhel $\measuredangle ADB = 90°$ (již dokázaná věta).



Úhel $\measuredangle BCD < 90°$ aby v trojúhelníku *BCD* nebyly dva pravé úhly.
(je protější k úhlu $\measuredangle ADB = 90°$).
Úhel $\measuredangle ACB > 90°$ (zbytek do $180°$).

Věta $\neg b \Rightarrow \neg a$ je pravdivá tedy je pravdivá i věta $a \Rightarrow b$.

3. Důkazy matematických vět, které mají tvar ekvivalence

- souvětí typu: „…, právě tehdy, když…“

Příklady:

- V rovině je dána úsečka *AB*. Pro libovolný bod *X* roviny platí, že leží na ose úsečky *AB* právě tehdy, když je jeho vzdálenost od bodů *A* i *B* stejná.
- Pro všechna reálná čísla platí: $x \geq 0$ právě tehdy, když $x - |x| = 0$.

Výrok ***v***, který dokazujeme je složený výrok $a \Leftrightarrow b$, nedokazujeme tedy platnost samotných výroků *a* nebo *b*, ale pravdivost ekvivalence („oboustranné šipky“ tedy ekvivalentnosti výroků *a* a *b*).

a	***b***	$a \Leftrightarrow b$	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

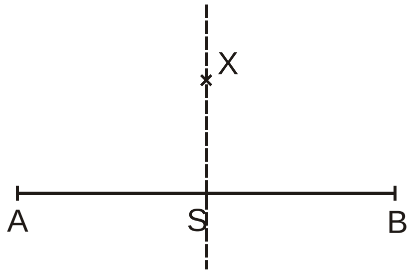
Z tabulky je vidět, že výrok $a \Leftrightarrow b$ má stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$. Stačí tedy dokázat pravdivost výroku $a \Rightarrow b$ (věta ve tvaru implikace) a výroku $b \Rightarrow a$ (opět věta ve tvaru implikace). Důkaz věty ve tvaru ekvivalence tak převedeme na dva důkazy vět implikačních.

Př. 6: V rovině je dána úsečka *AB*. Dokaž, že pro libovolný bod *X* roviny platí: „Bod *X* leží na ose úsečky *AB* právě tehdy, když je jeho vzdálenost od bodů *A* i *B* stejná.

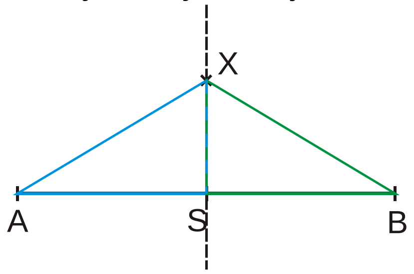
Dokazuji větu ve tvaru: $a \Leftrightarrow b$.
Výrok *a*: Bod *X* leží na ose úsečky *AB*.
Výrok *b*: Vzdálenost bodu *X* od bodů *A*, *B* je stejná.

Nejdříve dokazuji výrok $a \Rightarrow b$: „Pro libovolný bod *X* roviny platí: „Jestliže bod *X* leží na ose úsečky *AB* pak je jeho vzdálenost od bodů *A* i *B* stejná.“

Zvolím metodu přímého důkazu:
Nakreslím obrázek situace:



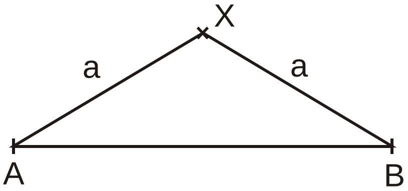
Sestrojíme trojúhelníky *ASX* a *BSX*.



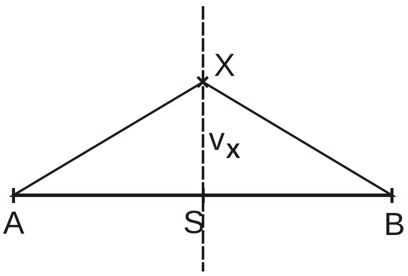
Oba trojúhelníky jsou shodné podle věty sus:
společná strana *SX*
pravé úhly $\sphericalangle ASX$ a $\sphericalangle BSX$ (osa úsečky je na ní kolmá)
stejné strany *AS* a *BS* (osa úsečky prochází jejím středem)
$\Rightarrow$ musí mít shodné všechny strany $\Rightarrow$ strany *XA* a *XB* jsou shodné $\Rightarrow$ vzdálenost bodu *X* od bodů *A*, *B* je stejná.

Nyní dokazuji výrok $b \Rightarrow a$: „Pro libovolný bod *X* roviny platí: „Jestliže je vzdálenost od bodů *A* i *B* stejná, pak bod *X* leží na ose úsečky *AB*.“

Zvolím metodu přímého důkazu:
Vzdálenost bodu *X* od bodů *A* a *B* je stejná, jsou dvě možnosti:
bod *X* leží na úsečce $\Rightarrow$ musí být jejím středem a tedy leží na její ose.
bod *X* neleží na úsečce $\Rightarrow$ mohu sestrojit trojúhelník *ABX*



trojúhelník *ABX* je rovnoramenný $\Rightarrow$ jeho výška v_X prochází středem základný *AB* a je její osou $\Rightarrow$ bod *X* leží na ose úsečky *AB*.



Věta je dokázána.

Shrnutí: