1.4.5 Kvantifikované výroky a jejich negace

Předpoklady: 1401, 1402, 1403, 1404

Př. 1: Rozhodni, zda je věta „Přirozená čísla jsou dělitelná třemi." výrok.

Není výrok, těžko říct o jaká přirozená čísla jde.

Z předchozí věty jde udělat výrok, když určíme o jaká přirozená čísla jde. Dvě možnosti:

1.
Existuje alespoň jedno přirozené číslo dělitelné třemi. (pravdivý výrok).
Existuje alespoň jedno = existenční (malý) **kvantifikátor**, značí se $\exists$
Matematický zápis:

$\exists n \in \mathbb{N}$	$n = 3k$
Existuje alespoň jedno přirozené číslo *n* takové	, že *n* je dělitelné 3.

2.
Všechna přirozená čísla jsou dělitelná třemi. (nepravdivý výrok).
Všechna = obecný (velký) **kvantifikátor**, značí se $\forall$
Matematický zápis:

$\forall n \in \mathbb{N}$	$n = 3k$
Všechna přirozená čísla *n*	jsou dělitelná 3.

Př. 2: Přečti následující výrok: „$\forall n \in \mathbb{N}$**,** $n \neq 1$**,** $\exists k \in \mathbb{N}$**,** $k < n$**.**" Rozhodni, zda je tento výrok pravdivý.

Pro všechna přirozená čísla *n*, různá od jedné, existuje alespoň jedno přirozené číslo *k*, které je menší než *n*.
Výrok je pravdivý.

Př. 3: Přečti následující výrok: „$\exists n \in \mathbb{N}$**,** $\forall p \in \mathbb{N}$**,** $p \neq n$**,** $p > n$**.**" Rozhodni, zda je tento výrok pravdivý.

Existuje přirozené čísl *n*, takové, že všechna přirozená čísla *p* různá od *n* jsou větší než *n*.
Výrok je pravdivý, hledaným číslem *n* je 1.

Př. 4: Pomocí kvantifikátorů vytvoř z věty: „Pro čísla *x* a *y*, platí $x^2 + y^2 = 0$.", pravdivý a nepravdivý výrok

pravdivý výrok:
$\exists x \in \mathbb{R}$ a $\exists y \in \mathbb{R}$, platí $x^2 + y^2 = 0$
Existuje alespoň jedna dvojice reálných čísel *x* a *y*, pro kterou platí $x^2 + y^2 = 0$
$\Rightarrow$ pravda (dvojice čísel 0, 0)

nepravdivý výrok:
$\forall x \in \mathbb{R}$ a $\forall y \in \mathbb{R}$, platí $x^2 + y^2 = 0$

Pro každou dvojici reálných čísel *x*, *y* platí $x^2 + y^2 = 0$.
$\Rightarrow$ nepravda (platí pouze pro dvojici čísel 0, 0)

Př. 5: Pomocí kvantifikátorů vytvoř z věty: „Pro číslo *x* platí $x^2 > -1$.“, výroky a rozhodni o jejich pravdivosti. Který z obou výroků má větší vypovídací hodnotu?

$\exists x \in \mathbb{R}$, platí $x^2 > -1$.
Existuje reálné číslo *x*, pro které platí $x^2 > -1$.
- pravda
$\forall x \in \mathbb{R}$, platí $x^2 > -1$
Pro každé reálné číslo *x* platí $x^2 > -1$.
- pravda

Více toho říká druhý výrok, z jeho pravdivosti vyplývá i pravdivost prvního výroku.

Negace kvantifikovaných výroků

Z novodobých dějin ČR (kapitola první)
31.10.2008 probíhal na gymnáziu poslední den týdenní hloubkové kontroly České školní inspekce. Poté, co inspektoři zkontrolovali, zda jsou třídnice odškrtané zprava nahoře do leva dole, zda je ve všech třídnicích za loňský školní rok dvanáctkrát napsáno, že studenti byli poučeni o chování a bezpečnosti, a poté co pečlivě ověřili, zda škola neporušila pravidla hospodaření a nezakoupila více než pět chlebíčků jako občerstvení maturitní komise zbyly inspektorům ještě celé dvě hodiny, ve kterých se rozhodli navštívit výuku. První z vylosovaných učitelů byl Mgr. Topůrko. Měl studenty rád, byl velmi oblíbený a tak, když se ho pan inspektor Bedlivý ptal, zda jsou studenti hodní řekl: „Pane inspektore, vsadím se s Vámi klidně své boty, všichni jsou hodní a nebudou zlobit“. Pan inspektor se zasmál a paní učitelka Nováková (kolegyně Mgr. Topůrka) se chytla za hlavu: „Jirko, to nemůžeš vyhrát vždyť…

Př. 6: Jak asi zdůvodnila Mgr. Nováková, že Mgr. Topůrko prohraje?

„stačí aby jediný z nich zazlobil a prohraješ“.

A tak se i stalo. Robert není zlý student, ale zkrátka se neovládá a od té doby chodí Mgr. Topůrko bos.

Př. 7: Neguj výrok: „Pro všechna přirozená čísla platí, že mají alespoň dva dělitele.“

Výrok je nepravdivý (1 má jen jednoho dělitele) $\Rightarrow$ negace musí být pravdivá.
Negace: Existuje alespoň jedno číslo, které má méně než 2 dělitele.
To je ta 1.

Př. 8: Neguj výrok: „Pro všechny prvky množiny *M* platí bla bla bla.“

Existuje alespoň jeden prvek množiny *M*, pro který neplatí bla bla bla.

Z novodobých dějin ČR (kapitola druhá)

Druhým vylosovaným učitelem byla Ing. Ohradová. Studenty neměla ráda a nedůvěřovala jim. Již před hodinou varovala inspektora, že třída je hloupá, líná a nepořádná a určitě alespoň jeden student nebude mít cvičební úbor. Pan inspektor se divil a vsadil se s paní učitelkou, že určitě nebude mít pravdu.

Př. 9: Jak dopadla kontrola cvičebních úborů ve třídě, když pan inspektor opravdu vyhrál?

Ani jeden žák si úbor nezapomněl.

A od tak získala nové boty i paní Bedlivá

Př. 10: Neguj výrok: „Existuje alespoň jedno přirozené číslo, které má méně než 2 dělitele.“

Výrok je pravdivý (jednička má jednoho dělitele) $\Rightarrow$ negace musí být nepravdivá.
Negace: Všechna přirozená čísla mají alespoň 2 dělitele.
Pro jedničku to neplatí.

Pedagogická poznámka: Při zadání dalšího příkladu je dobré studenty upozornit, aby si přečetli pozorně zadání, protože v následujícím příkladu jde u množiny *M* o vlastnost ga ga ga a ne bla bla bla, a nedělali tak zbytečné chyby.

Př. 11: Neguj výrok: „Existuje alespoň jeden prvek množiny *M*, pro který platí ga ga ga.“

Pro žádný prvek množiny *M*, neplatí ga ga ga.

Výsledky předchozích příkladů můžeme shrnout do tabulky:

v	$\neg v$
Každý prvek množiny *M* má vlastnost.	Alespoň jeden prvek množiny *M* nemá vlastnost.
Alespoň jeden prvek množiny *M* má vlastnost.	Žádný prvek množiny *M* nemá vlastnost.

Pedagogická poznámka: Při opisování tabulky jsem si u jedné ze studentek (které činí velké problémy, cokoliv si zapamatovat) všiml zajímavé maličkosti. Místo aby opisovala tabulku po řádcích (tedy v logické návaznosti - výrok a pak jeho negace), postupovala po sloupcích (tedy nejdřív oba výroky a pak negace). Chvíli jsme si pak povídalo o tom, že i takové maličkosti mohou mít vliv na to, jestli v hlavě něco zůstane nebo ne.

Př. 12: Neguj následující výroky:
a: „Všichni studenti 1.B jsou mladší 18-ti let.“
b: „Existuje alespoň jeden pravoúhlý trojúhelník.“
c: „Průnik libovolné množiny s množinou prázdnou je prázdná množina“.
d: „Na každém šprochu, pravdy trochu.“

$\neg a$: Alespoň jeden student 1.B je starší 18 let.
$\neg b$: Žádný trojúhelník není pravoúhlý.
$\neg c$: Existuje alespoň jedna množina, jejíž průnik s množinou prázdnou je neprázdný.
$\neg d$: Existuje alespoň jeden šproch, na kterém není žádná pravda.

Př. 13: Petáková:
strana 11/cvičení 12
strana 11/cvičení 13
strana 11/cvičení 14
strana 11/cvičení 15

Shrnutí: