1.4.3 Složené výroky – implikace a ekvivalence

Předpoklady: 1401, 1402

Pedagogická poznámka: Látka zabere spíše jeden a půl vyučovací hodiny. Buď můžete využít písemku nebo se podělit o čas s následující hodinou, která se také nedá stihnout za 45 minut.

Implikace

Implikace libovolných výroků *a*,*b* je výrok, který vznikne jejich spojením slovním obratem **jestliže, pak**, píšeme $a \Rightarrow b$ a čteme **jestliže *a*, pak *b***.
Výroku *a* se říká předpoklad, výroku *b* závěr.

Pravdivostní tabulka. Příklad výroku: Když přijdeš, dám ti 100 Kč.

a	***b***	$a \Rightarrow b$	
1	1	1	**Přijdeš a dám 100 Kč – měl jsem pravdu**
1	0	0	**Přijdeš a nedám 100 Kč – lhal jsem**
0	1	1	**Nepřijdeš a dám 100 Kč – měl jsem pravdu, o této možnosti jsem nehovořil**
0	0	1	**Nepřijdeš a nedám 100 Kč – měl jsem pravdu, o této možnosti jsem nehovořil**

Pedagogická poznámka: Následující výroky využívají některé vlastnosti autora učebnice. Jde o můj zvyk nosit stále stejné oblečení, konkrétně modrý svetr. Následující výroky pak dokumentují, jak je to s pravdivostí implikací, které vycházejí z výroku zjevně pravdivého („Krynický má modrý svetr“) nebo z výroku zjevně nepravdivého („tabule je oranžová“). Podobné zvláštnosti má určitě každý učitel, takže si můžete sestavit podobné výroky na sebe.

Př. 1: Rozhodni zda je pravdivý výrok: „Jestli má Krynický modrý svetr, pak je oranžová tabule.“

Jde výrok složený ze dvou výroků:
a: Krynický má modrý svetr – pravda (1)
b: Tabule je oranžová – nepravda (0)
Celý výrok má tvar $a \Rightarrow b$, dosadím pravdivosti výroků $1 \Rightarrow 0 = 0$.
Výrok je nepravdivý.

Př. 2: Rozhodni zda je pravdivý výrok: „Jestli je oranžová tabule, pak má Krynický modrý svetr.“

Jde výrok složený ze dvou výroků:
a: Tabule je oranžová – nepravda (0)
b: Krynický má modrý svetr – pravda (1)
Celý výrok má tvar $a \Rightarrow b$, dosadím pravdivosti výroků $0 \Rightarrow 1 = 1$.
Výrok je pravdivý.

Z pravdivosti implikace $a \Rightarrow b$ nevyplývá pravdivost implikace $b \Rightarrow a$ (obrácená implikace). U implikace (na rozdíl od konjunkce a disjunkce) záleží na pořadí výroků!
Předchozí větu můžeme snadno dokumentovat pomocí následujících implikací:
Je-li číslo dělitelné šesti, je dělitelné i třemi. - pravda
Je-li číslo dělitelné třemi, je dělitelné i šesti. - obrácená implikace je nepravdivá

Př. 3: Rozhodni zda je pravdivý výrok: „Jestliže je tabule oranžová, pak Krynický je hezká holka.“

Jde výrok složený ze dvou výroků:
a: Tabule je oranžová – nepravda (0)
b: Krynický je hezká holka – nepravda (0)
Celý výrok má tvar $a \Rightarrow b$, dosadím pravdivosti výroků $0 \Rightarrow 0 = 1$.
Výrok je pravdivý.

Pedagogická poznámka: Studenti mají problém s tím, že pravdivá implikace může obsahovat i dvě zcela nesmyslná tvrzení. Je třeba pořád zdůrazňovat, že jde více o vzájemný vztah dvou výroků než o výroky samé.
Jinak předchozí výrok je obdobou ještě dnes používaného „jestli si chytil takovouhle rybu, tak já jsem čínskej bůh srandy“.

Př. 4: Urči pravdivostní hodnotu výroků:
a) Jestliže je Země kulatá, pak obíhá kolem Slunce.
b) Jestliže je Země kulatá, pak je plochá.
c) Jestliže je Země plochá, pak je kulatá.
d) Jestliže je Země plochá, pak se dá srolovat do igelitky.

Nejdříve si určíme pravdivost jednotlivých výroků:
Země je kulatá. – pravdivý výrok
Země obíhá kolem Slunce – pravdivý výrok
Země je plochá – nepravdivý výrok
Země se dá srolovat do igelitky – nepravdivý výrok

Teď rozebereme jednotlivé výroky:
a) Jestliže je Země kulatá, pak obíhá kolem Slunce. $\Rightarrow$ výrok $1 \Rightarrow 1 = 1$ - pravda
b) Jestliže je Země kulatá, pak je plochá. $\Rightarrow$ výrok $1 \Rightarrow 0 = 0$ - nepravda
c) Jestliže je Země plochá, pak je kulatá. $\Rightarrow$ výrok $0 \Rightarrow 1 = 1$ - pravda
d) Jestliže je Země plochá, tak se dá srolovat do igelitky. $\Rightarrow$ výrok $0 \Rightarrow 0 = 1$ - pravda

Př. 5: Pomocí tabulky pravdivostních hodnot rozhodni, kdy je pravdivý výroku $(a \wedge b) \Rightarrow a$

a	***b***	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \Rightarrow a$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Výrok $(a \wedge b) \Rightarrow a$ je pravdivý vždy nezávisle na tom, zda jdou pravdivé výroky *a*, *b*, ze kterých je sestaven. Takový výrok se nazývá **tautologie**.

Př. 6: Dosaď do formule $(a \wedge b) \Rightarrow a$ dva libovolné konkrétní výroky *a*, *b* a ověř, že jsi získal pravdivý výrok.

Zvolíme třeba dva nepravdivé výroky:
a: Číslo 5 je sudé.
b: Číslo 5 je záporné.
Získáváme výrok: „Je-li číslo 5 sudé a zároveň záporné, pak je sudé.

Př. 7: Najdi další tautologie. Pravdivost odhadu dokaž pomocí tabulky pravdivostních hodnot a ověř dosazením libovolných výroků.

Možností je mnoho, ty nejjednodušší:
$a \vee \neg a$ - (u disjunkce stačí jeden pravdivý výrok, zvolím výrok a jeho negaci, vždy je právě jeden z nich pravdivý)

a	$\neg a$	$a \vee \neg a$
1	0	1
0	1	1

Zkusíme nepravdivý výrok *a*: Země je placatá.
$a \vee \neg a$: Země je nebo není placatá.
$a \Rightarrow a$ - (implikace je nepravdivá jen s pravdivým předpokladem a nepravdivým závěrem, pokud použiju jediný výrok nemůže tato situace nikdy nastat)

a	$a \Rightarrow a$
1	1
0	1

Zkusíme nepravdivý výrok *a*: Země je placatá.
$a \Rightarrow a$: Je-li Země placatá, pak je placatá.

Poznámka: Zde může matematika vhodně pomoci dospívajícímu při výslechu rodičů. V odpovědích na zvídavé dotazy můžete používat tautologie, nebudete tak lhát a rodiče se nic nedovědí. Například na otázku: „Tak co, byla si tam s tím šaškem?“, se hodí obě tautologie: „Byla jsem tam s ním nebo jsem tam s ním nebyla“ nebo „Jestli jsem tam s ním byla, pak jsem tam s ním byla“.

Pedagogická poznámka: V předchozích dvou příkladech by měli studenti do formulí dosazovat svoje vlastní výroky, aby si dosazování vyzkoušeli. Budou ho potřebovat na konci hodiny.

Ekvivalence

Př. 8: Ekvivalence libovolných výroků *a*, *b* (značíme ji $a \Leftrightarrow b$) je konjunkce implikace $a \Rightarrow b$ a obrácené implikace $b \Rightarrow a$. Zapiš tento výrok pomocí formule a doplň její tabulku pravdivostních hodnot.

Formuli sestavíme postupně:
Ekvivalence libovolných výroků *a*, *b* je konjunkce $\Rightarrow$ tvar výroku $(\quad) \wedge (\quad)$

Doplníme implikace, ze kterých je sestavená konjunkce: $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

a	***b***	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Pedagogická poznámka: Postupný přístup při sestavování formule se nám bude hodit při slovních úlohách.

Shrneme:

Ekvivalence

- Ekvivalence libovolných výroků *a*, *b* je konjunkce implikace $a \Rightarrow b$ a obrácené implikace $b \Rightarrow a$, tedy výrok $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ – značíme jej $a \Leftrightarrow b$ a čteme (***a* je ekvivalentní s *b*** nebo ***a* platí právě tehdy, když platí *b***).
- Ekvivalence $a \Leftrightarrow b$, kde *a*, *b* jsou libovolné výroku je pravdivá pouze tehdy, když výroky *a, b* jsou oba pravdivé nebo oba nepravdivé.

Význam ekvivalence je schován už v názvu: ekvivalentní = stejný, odpovídající
Když zjišťujeme zda jsou dva výroky jsou ekvivalentní, zjišťujeme zda říkají to samé.

Př. 9: Rozhodni zda jsou výroky $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow a$ a $\neg b \Rightarrow \neg a$ ekvivalentní.

Napíšeme tabulku pravdivostních hodnot a pokud budou sloupce u výroků stejné jsou ekvivalentní.

a	***b***	$\neg a$	$\neg b$	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Sloupce výroků $a \Rightarrow b$ a $\neg b \Rightarrow \neg a$ jsou stejné $\Rightarrow$ ekvivalence $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ platí vždy $\Rightarrow$ výroky $a \Rightarrow b$ a $\neg b \Rightarrow \neg a$ jsou ekvivalentní.

Výrok $\neg b \Rightarrow \neg a$ se nazývá **obměněná implikace** k implikaci $a \Rightarrow b$ a **je s ní ekvivalentní**.
Tato vlastnost se používá při metodě nepřímého důkazu.

Výrok $b \Rightarrow a$ se nazývá **obrácená implikace** k implikaci $a \Rightarrow b$ a **není s ní ekvivalentní**.

Př. 10: Zformuluj obměněnou implikaci k výroku: „Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak pro jeho strany platí Pythagorova věta.“.

Stačí mechanicky negovat obě věty a prohodit jejich pořadí v souvětí.
Neplatí-li pro strany trojúhelníku Pythagorova věta, pak není pravoúhlý.

Pedagogická poznámka: Předchozí a následující příklad jsou cvičení na dosazování výroků do formulí. V některých případech je to trochu krkolomné, ale právě proto je to důležité cvičení obecnější schopnosti „dodržovat pravidlo“. Je důležité, aby maximum výroků zkusili studenti zformulovat sami.

Př. 11: Zformuluj obměněné implikace k následujícím výrokům:
a) Jestliže je číslo x dělitelné šesti, tak je dělitelné třemi.
b) Pokud je číslo x větší než 10, je kladné.
c) Jestli to stihnu, tak přijdu.
d) Jestli to řekneš ještě jednou, tak ti dám pěstí.

Stačí mechanicky negovat obě věty a prohodit jejich pořadí v souvětí.
a) Jestliže je číslo x dělitelné šesti, tak je dělitelné třemi.
Obměněná implikace: Jestliže číslo x není dělitelné třemi, není dělitelné šesti.
b) Pokud je číslo x větší než 10, je kladné.
Obměněná implikace: Pokud číslo není kladné, není větší než 10.
c) Jestli to stihnu, tak přijdu.
Obměněná implikace: Jestli nepřijdu, tak to nestihnu.
d) Jestli to řekneš ještě jednou, tak ti dám pěstí.
Obměněná implikace: Jestli Ti dám pěstí, tak to řekneš ještě jednou.

Př. 12: Petáková:
strana 10/cvičení 5
strana 10/cvičení 6
strana 10/cvičení 7 b)
strana 10/cvičení 8 a) b) d)
strana 10/cvičení 9

Shrnutí: Jakákoliv implikace vycházející z nepravdy je pravdivá.