

1.4.2 Složené výroky – konjunkce a disjunkce

Předpoklady: 1401

Složené výroky = souvětí, výroky složené z více jednoduchých výroků

Výrok: „Číslo 5 je sudé a je prvočíslo.“

Sestavený ze dvou výroků:

1. výrok: Číslo 5 je sudé - NEPRAVDIVÝ

2. výrok: Číslo 5 je prvočíslo – PRAVDIVÝ

Celý výrok je nepravdivý, chci aby platilo obojí \Rightarrow takový výrok se nazývá **konjunkce**

Konjunkce

- konjunkce libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením spojkou **a** (nebo **a zároveň někdy i**), zapisujeme $a \wedge b$ a čteme **a a zároveň b**.
- konjunkce je pravdivá pouze, když jsou pravdivé oba výroky a, b .

Poznámka: Konjunkce souvisí s průnikem $A \cap B$. Průnik obsahuje prvky, které jsou prvky množiny A a zároveň jsou prvky množiny B . Proto je značka průniku \cap podobná značce pro konjunkci \wedge .

Tabulka pravdivostních hodnot

Obsahuje všechny kombinace jednoduchých výroků, ze kterých je složený výrok sestaven a jeho výsledné hodnoty pravdivosti. Pravda se značí 1, nepravda 0.

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Pedagogická poznámka: Výroky ve většině následujících příkladů obsahují základní poznatky učiva základní školy z jiných předmětů. Bohužel to přináší diskuse o tom, které výroky jsou pravdivé a které ne. Je zřejmé, že by bylo rychlejší nahradit tyto odkazy trivialitami typu „úterý je druhý den v týdnu“, ale jsem přesvědčený, že pokud mám vychovávat studenty k tomu, aby si pamatovali základní poznatky z matematiky, měl bych po nich chtít, aby si pamatovali základní poznatky i z ostatních předmětů.

Př. 1: Rozhodni zda jsou pravdivé výroky:

a) Otava je přítok Vltavy a chlorofyl je modré barvivo.

b) Alexandr Veliký dobyl Perskou říši a Ankara je hlavní město Turecka.

a)

Nejdříve musím zjistit pravdivost výroků, ze kterých je složeno souvětí.

Otava je přítok Vltavy. - pravdivý výrok (1)

Chlorofyl je modré barvivo. - nepravdivý výrok (0)

Složený výrok je nepravdivý (Nejsou pravdivé oba výroky, ze kterých je složen.)

$$1 \wedge 0 = 0$$

b)

Nejdříve musím zjistit pravdivost výroků, ze kterých je složeno souvětí.

Alexandr Veliký dobyl Perskou říši. - pravdivý výrok (1)

Ankara je hlavní město Turecka. - pravdivý výrok (1)

Složený výrok je pravdivý (Jsou pravdivé oba výroky, ze kterých je složen.)

$1 \wedge 1 = 1$

Př. 2: Jsou dány výroky:

a: Berounem protéká řeka Ohře.

b: Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka.

c: Václav III byl synem Václava II.

d: Kompas byl vynalezen v Číně.

Sestav z těchto výroků pravdivou a nepravdivou konjunkci.

Určíme pravdivostní hodnotu výroků:

a: Berounem protéká řeka Ohře. ... 0

b: Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka. ... 1

c: Václav III byl synem Václava II. ... 1

d: Kompas byl vynalezen v Číně. ... 1

Pravdivá konjunkce:

Musí být sestavena pouze z pravdivých výroků \Rightarrow jakákoliv konjunkce sestavená z výroků *b*, *c*, *d*.

Například: $b \wedge c$: Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka a Václav III byl synem Václava II.

Nepravdivá konjunkce:

Musí obsahovat alespoň jeden nepravdivý výrok:

Například: $a \wedge b$: Berounem protéká řeka Ohře a Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka.

Př. 3: Sestav pravdivou konjunkci s výrokem *a* (Berounem protéká řeka Ohře.)

Všechno v konjunkci musí být pravda, ale výrok *a* je nepravdivý \Rightarrow musím výrok *a* znegovat.

Například: $\neg a \wedge d$: Berounem neprotéká řeka Ohře a kompas byl vynalezen v Číně.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je tak trochu snahou o navození situace, kdy si studenti musí rozmyslet, co všechno mají opravdu k dispozici, protože jednoduchá a běžná cesta k řešení neexistuje.

Př. 4: Rozhodni o pravdivosti výroku: „Napoleon byl generál a francouzský císař.“

Dva výroky:

a: Napoleon byl generál. ... 1

b: Napoleon byl francouzský císař. ... 1

Máme výrok $1 \wedge 1 = 1$.

Výrok je pravdivý.

Poznámka: Předchozí výrok je ukázkou zkracování složených výroků do jediné věty. I přesto zůstává výrok pořád složeným.

Př. 5: Rozhodni zda je pravdivý výrok: Sofokles, Aischylos a Jaromír Jágr byli slavní řečtí starověcí dramatici.

Jde výrok složený ze tří výroků:

a : Sofokles byl slavný řecký starověký dramatik ... pravda (1)

b : Aischylos byl slavný řecký starověký dramatik ... pravda (1)

c : Jaromír Jágr byl slavný řecký starověký dramatik ... nepravda (0)

Celý výrok má tvar $(a \wedge b) \wedge c$, dosadím pravdivosti výroků $(1 \wedge 1) \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0$.

Výrok je nepravdivý.

Př. 6: Odhadni pravdivost výroku: „Číslo 6 je prvočíslo nebo číslo 6 je menší než 10.“

První výrok je nepravdivý, druhý je pravdivý. Celý výrok je pravdivý.

\Rightarrow u spojky **nebo** stačí pravdivost jediného výroku.

Disjunkce

- Disjunkce libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením spojkou **nebo**. Píšeme $a \vee b$ čteme – **a nebo b**
- Disjunkce je pravdivá, když je alespoň jeden z výroků a, b pravdivý. (Umyješ nádobí nebo vytřeš – stačí udělat jedno, ale je možné udělat obojí).

Poznámka: Disjunkce souvisí se sjednocením $A \cup B$. Sjednocení obsahuje prvky, které jsou prvky množiny A nebo jsou prvky množiny B . Proto je značka sjednocení \cup podobná značce pro disjunkci \vee .

Př. 7: Sestav tabulku pravdivostních hodnotu disjunkce $a \vee b$.

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Př. 8: Rozhodni o pravdivosti výroku: Václav Havel byl prezidentem ČR nebo mluvčím Charty 77.

Dva výroky:

a : Václav Havel byl prezidentem ČR. ... 1

b : Václav Havel byl mluvčím Charty 77. ... 1

Máme výrok $1 \vee 1 = 1$.

Výrok je pravdivý.

Př. 9: Jsou dány výroky:

a : Berounem protéká řeka Ohře.

b : Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka.

c : Václav III byl synem Václava II.

d: Kompas byl vynalezen v Číně.

Sestav z těchto výroků pravdivou a nepravdivou disjunkci bez použití negace.

Určíme pravdivostní hodnotu výroků:

<i>a</i> : Berounem protéká řeka Ohře. ...	0
<i>b</i> : Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka. ...	1
<i>c</i> : Václav III. byl synem Václava II. ...	1
<i>d</i> : Kompas byl vynalezen v Číně. ...	1

Pravdivá disjunkce:

Musí obsahovat alespoň jeden pravdivý výrok \Rightarrow jakákoliv disjunkce sestavená z výroků *a*, *b*, *c*, *d*.

Například: $b \vee c$: Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka nebo Václav III byl synem Václava II.

Nepravdivá disjunkce:

Musí obsahovat pouze nepravdivé výroky \Rightarrow musím použít pouze výrok *a*:

$a \vee a$: Berounem protéká řeka Ohře nebo Berounem protéká řeka Ohře.

Pedagogická poznámka: Sestavení nepravdivé disjunkce považuje většina studentů za nemožné, ani je nenapadne, že by ve složeném výroku mohl vystupovat dvakrát jeden a ten samý výrok. Připomínám studentů v souvislosti s tímto příkladem, že jsme v žádném případě nezakázali při sestavování složeného výroku použít jeden výrok vícekrát, přesto naprostá většina z nich toto omezení nevědomě dodržovala. Z podobných omezení pramení nemalá část chyb v matematice.

Př. 10: Sestav nepravdivou disjunkci ze všech čtyř předchozích výroků.

Všechny výroky musí být nepravda, co je pravdivé musíme znegovat: $a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d$
Berounem protéká řeka Ohře nebo nejvyšší horou Krkonoš není Sněžka nebo Václav III. nebyl synem Václava II. nebo kompas nebyl vynalezen v Číně.

Př. 11: Pomocí pravdivostní tabulky rozhodni pravdivosti výroku $(\neg a \wedge b) \vee a$.

<i>a</i>	<i>b</i>	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$(\neg a \wedge b) \vee a$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

Př. 12: Pomocí pravdivostní tabulky rozhodni pravdivosti výroku $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$.

<i>a</i>	<i>b</i>	$\neg a$	$\neg b$	$a \wedge b$	$\neg a \wedge \neg b$	$(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Př. 13: Petáková:
strana 10/cvičení 3
strana 10/cvičení 4
strana 10/cvičení 7 a)

Shrnutí: Spojky *a* a *nebo* se v matematice používají při sestavování složených výroků analogicky s běžným jazykem.