

1.3.4 Řešení slovních úloh pomocí Vennových diagramů I

Předpoklady: 1303, řešení rovnic

Pedagogická poznámka:

Řešení slovních množinových úloh pomocí Vennových diagramů mně přijde zajímavé a přínosné z těchto důvodů:

jde o první příležitost, kdy se studenti snaží zapsat slovní zadání pomocí písmen a proměnných, učí se postupovat přesně podle textu a zohledňovat každé slovo

řešení úloh vyžaduje systematický postup a dlouhou dobu není vidět výsledek (to činí mnoha klukům obrovské problémy. Začnou ihned počítat nějaké částečné výsledky, které nedokáží spojit dohromady, ale standardní postup jim přijde příliš zdoluhavý)

studenti poznají, že pokud se drží algoritmu a nepospíchají dostanou se k výsledku i ve zdánlivě beznadějně situaci.

Slovní úlohy, které se zabývají počty prvků v libovolných množinách můžeme řešit pomocí Vennových diagramů.

- Podle počtu množin zvolíme diagram.
- Zachytíme situaci pomocí jednotlivých oblastí v diagramu do rovnic.
- Získanou soustavu rovnic vyřešíme.

Největší zádrhele:

- jak přepsat slovní zadání do rovnic (hlavně významy slov nebo, právě jeden, nejméně dva apod.)
- neztratit přehled o soustavě rovnic a vyřešit ji

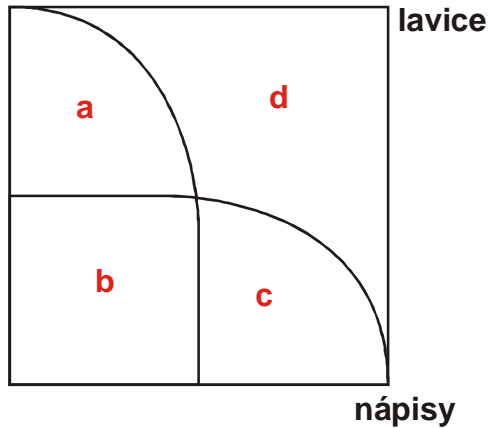
Poznámka: Je zcela zřejmé, že první dva příklady je možné vyřešit úvahou daleko rychleji. Jsou zde uvedeny hlavně kvůli zvládnutí metody.

Poznámka: U všech následujících příkladů je samozřejmě zcela jedno, jak si je zakreslíte do obrázků nebo jak si označíte jednotlivé části diagramu. Pokud však chcete spolupracovat a kontrolovat si svoji práci s ostatními nezbyvá než se na začátku každého příkladu domluvit a použít stejné značení.

Př. 1: Z 15 kontrolovaných lavic je poškrábaných nebo popsáných 14 kusů. 10 lavic má nejvýše jeden druh poškození. Poškrábaných lavic je o 3 více než popsáných. Kolik lavic je:

- jenom poškrábaných
- poškrábaných i popsáných

škrábance



Mám čtyři proměnné, potřebuji čtyři rovnice. Každé číslo v zadání většinou vede k jedné rovnici.

- | | | |
|---|---------------|--|
| Z 15 lavic | \Rightarrow | $a + b + c + d = 15$ |
| 14 poškrábaných nebo popsáných
pokreslená je i lavice poškozená oběma způsoby) | \Rightarrow | $a + b + c = 14$ (popsaná nebo |
| 10 lavic má nejvýše jeden druh poškození
znamená jeden nebo žádný) | \Rightarrow | $a + c + d = 10$ (nejvýše jeden |
| Poškrábaných lavic je o 3 více než popsáných | \Rightarrow | $a + b = b + c + 3$ (poškrábané lavice |
- jsou buď jenom poškrábané nebo poškrábané i popsané, k počtu popsáných musíme přidat 3, aby se vyrovnal poškrábaným)

$$a + b + c + d = 15$$

$$a + b + c = 14$$

$$a + c + d = 10$$

$$a + b = b + c + 3$$

Dosadím za $a + b + c$ do první rovnice: $14 + d = 15 \Rightarrow d = 1$

Dosadím za d do třetí rovnice: $a + c + 1 = 10 \Rightarrow a + c = 9$

Upravím čtvrtou rovnici: $a = c + 3$

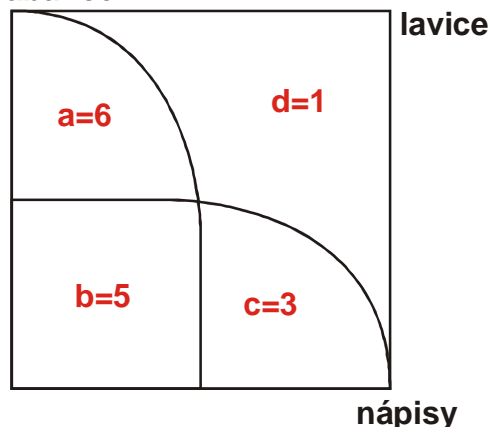
Dosadím za a do třetí rovnice $a + c = c + 3 + c = 2c + 3 = 9 \Rightarrow c = 3$

Dopočtu a : $a = c + 3 = 3 + 3 = 6$

Z druhé rovnice spočtu b : $6 + b + 3 = 14 \Rightarrow b = 5$

Zapíšu počty do obrázku:

škrábance



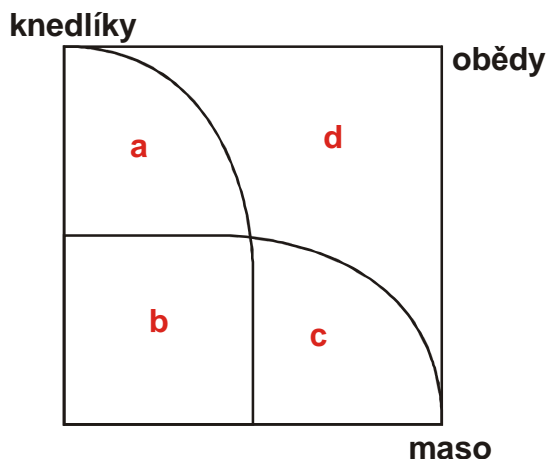
Nyní odpovím na otázky:

Jenom poškrábaných je 6 lavic (množina a), poškrábaných i popsaných je 5 lavic (množina b).

Pedagogická poznámka: První příklad řešíme při výuce společně. Na tabuli nakreslím diagram, označím množiny a napíšeme společně první rovnici. Pak čteme další údaje ze zadání a každý sestavuje rovnice, které nechodím moc kontrolovat do lavice, ale ukazujem si je po chvílce na tabuli. Další dva příklad řeší studenti spíše sami. Nejdříve sestaví soustavu rovnic, kterou si musí nechat schválit ode mě a pak se ji snaží dopočítat. Postupujeme tak, aby druhý příklad a rovnice třetího dokázali zkontrolovat na tabuli společně. I když se tři příklady mohou zdát málo, nezažil jsem ještě situaci, že by někdo neměl na konci hodiny, co dělat, většinou skončí hodina tak, že většina třídy má napsané rovnice z příkladu 3, ale dořešit je musí doma.

Pedagogická poznámka: Nejčastější problémy při sestavování rovnic. Použití spojky nebo, znamená že tam patří i lavice, která je poškrábaná a popsaná najednou (to samé s knedlíky v dalším příkladě). Ptám se jich: „Je na lavici která je popsaná i poškrábaná nějaký škrábanec“? Máš na talíři knedlík, když vracíš obojí?“

- Př. 2:** K obědu byla svíčková s knedlíkem. Kuchařky u okénka se špinavým nádobím provedly výzkum vrácených talířů od hlavního jídla. Alespoň kus knedlíku vrátilo 301 strážníků, kus knedlíku nebo maso dokonce 328 z nich. Ani kousek masa nebyl na 554 talířích, pouze maso nebo pouze knedlík vrátilo 250 obědvajících.
- Kolik lidí snědlo všechno?
 - Kolik strážníků tento den jedlo?
 - Kolik obědvajících vrátilo maso i knedlíky?



Mám čtyři proměnné, potřebuji čtyři rovnice. Každé číslo v zadání většinou vede k jedné rovnici.

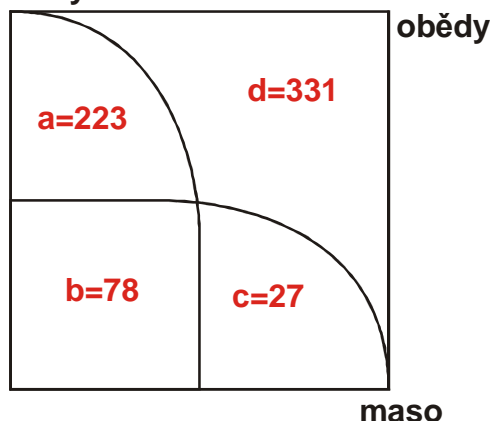
Alespoň kus knedlíku vrátilo 301 strážníků	\Rightarrow	$a + b = 301$
kus knedlíku nebo maso dokonce 328 z nich	\Rightarrow	$a + b + c = 328$
Ani kousek masa nebyl na 554 talířích	\Rightarrow	$a + d = 554$
pouze maso nebo pouze knedlík vrátilo 250	\Rightarrow	$a + c = 250$

$$\begin{aligned}
 a + b &= 301 \\
 a + b + c &= 328 \\
 a + d &= 554 \\
 a + c &= 250
 \end{aligned}$$

Dosadím za $a + b$ do druhé rovnice: $301 + c = 328 \Rightarrow c = 27$
 Dosadím za c do čtvrté rovnice: $a + 27 = 250 \Rightarrow a = 223$
 Dosadím za a do první rovnice: $223 + b = 301 \Rightarrow b = 78$
 Dosadím za a do třetí rovnice: $223 + d = 554 \Rightarrow d = 331$

Zapíšu počty do obrázku:

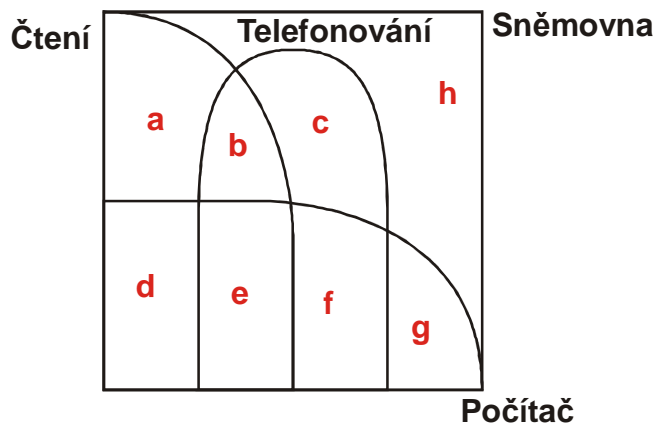
knedlíky



Nyní odpovím na otázky:

Všechno snědlo 331 lidí (množina d), jedlo 659 stravníků (množina $a + b + c + d$), maso i knedlíky vrátilo 78 lidí.

- Př. 3:** Při jednání jedné nejmenované poslanecké sněmovny byl proveden průzkum pracovního vytížení přítomných poslanců. Bylo zjištěno, že kromě sledování průběhu projednávání zákona poslanci stíhají číst noviny, telefonovat a pracovat hry na notebooku. Noviny čte 34 poslanců, telefonuje jich 36 a prací s hrami se trápí 38 zastupitelů. Žádnou z těchto tří činností nevykonává a jednání sleduje 35 poslanců. Pouze dva poslanci pak stíhají všechny tři činnosti najednou. Čte a zároveň telefonuje 6 poslanců a 3 poslanci zároveň čtou a pracují si hry. Telefonuje nebo pracuje hry 65 poslanců. Urči kolik poslanců:
- pouze telefonuje
 - pracuje hry nebo čte
 - dokáže vykonávat alespoň dvě z uvedených činností
 - je přítomno jednání sněmovny



- | | | |
|--------------------------------|---------------|------------------------------|
| Noviny čte 34 | \Rightarrow | $a + b + d + e = 34$ |
| Telefonuje 36 | \Rightarrow | $b + c + e + f = 36$ |
| Pracuje hry 38 | \Rightarrow | $d + e + f + g = 38$ |
| Jednání sleduje 35 | \Rightarrow | $h = 35$ |
| Všechny tři činnosti 2 | \Rightarrow | $e = 2$ |
| Čte a zároveň telefonuje 6 | \Rightarrow | $b + e = 6$ |
| Čte a pracuje si hry 3 | \Rightarrow | $d + e = 3$ |
| Telefonuje nebo pracuje hry 65 | \Rightarrow | $b + c + d + e + f + g = 65$ |

Dosadíme z h a e do ostatních rovnic:

$$a + b + d + 2 = 34$$

$$b + c + 2 + f = 36$$

$$d + 2 + f + g = 38$$

$$b + 2 = 6$$

$$d + 2 = 3$$

$$b + c + d + 2 + f + g = 65$$

$$a + b + d = 32$$

$$b + c + f = 34$$

$$d + f + g = 36$$

$$b = 4$$

$$d = 1$$

$$b + c + d + f + g = 63$$

Určili jsme další dvě neznámé dosadíme do zbývajících rovnic:

$$a + 4 + 1 = 32 \Rightarrow a = 27$$

$$4 + c + f = 34 \Rightarrow c + f = 30$$

$$1 + f + g = 36 \Rightarrow f + g = 35$$

$$4 + c + 1 + f + g = 63 \Rightarrow c + f + g = 58$$

Zbývají tři rovnice:

$$c + f = 30$$

$$f + g = 35$$

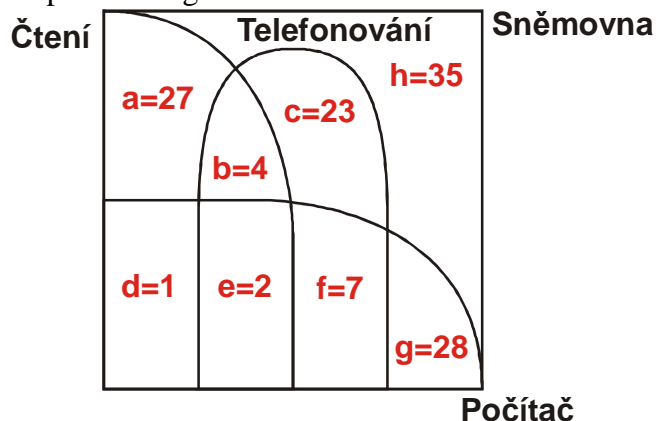
$$c + f + g = 58$$

Dosadíme za $c + f$ z první rovnice do třetí: $30 + g = 58 \Rightarrow g = 28$

Dosadíme do druhé: $f + 28 = 35 \Rightarrow f = 7$

Dosadíme do první: $c + 7 = 30 \Rightarrow c = 23$

Doplníme diagram:



Poslanců, kteří pouze telefonují je 23. (množina c).

Poslanců, kteří pracují hry nebo čtou je 69 (množina $a + b + c + d + e + f$).

Poslanců, kteří dokážou vykonávat alespoň dvě z uvedených činností, je 14 (množina

$b+d+e+f$).

Jednání sněmovny je přítomno 127 poslanců (množina $a+b+c+d+e+f+g+h$).

Shrnutí: