## 1.3.1 Množiny

**Předpoklady:**

**Pedagogická poznámka:** Cílem hodiny je spíše než seznámení s pojmy teorie množin, nácvik pochopení obsahu definic. Proto nejsou definice dokumentovány na řešených příkladech. Cíle však můžete dosáhnout pouze tím, že budete trvat na tom, aby studenti zkusili příklady řešit samostatně. Většina studentů však není zvyklá zkoušet vlastní interpretaci, takže to nepůjde snadno.

- teorie množin = TEMNO
- dnes základ matematiky
- pořádné zavedení pojmu množiny je obtížné

Pro nás: **Množina je souhrn nějakých předmětů (prvků množiny)**.

Píšeme:
- $x \in A$ - $x$ je prvkem množiny $A$
- $x \notin A$ - $x$ není prvkem množiny $A$

Množiny podle počtu prvků:
- konečné (množina žáků 1.B)
- nekonečné (množina všech přirozených čísel)

Prázdná množina – nemá žádný prvek, píšeme $C = \emptyset$, nebo jen $\emptyset$.

Zadávání množin:
**a) výčtem:**
$A = \{1;2;3\}$
- nejde u nekonečných množin
- nezáleží na pořadí prvků ve výčtu $\Rightarrow$ více možností: $A = \{1;2;3\}$, $A = \{1;3;2\}$
- každý prvek se uvádí právě jednou $\Rightarrow$ zápis $B = \left\{1;5;3;\frac{10}{2}\right\}$ je špatný, 5 je tam dvakrát

**b) charakteristickou vlastností:**
do množiny zahrnu prvky s uvedenou vlastností
$A = \{x \in \mathbb{N}; x \le 3\}$ (množina přirozených čísel menších nebo rovných 3)
$K$ je množina všech kluků v 1.B, kteří mají brýle.

**Př. 1:** Vyjádři množinu $B = \{x \in \mathbb{N}; x < 6\}$ výčtem.

$B = \{x \in \mathbb{N}; x < 6\}$ $\Rightarrow$ přirozená čísla menší než 6 $\Rightarrow$ $B = \{1;2;3;4;5\}$

**Př. 2:** Následující množiny zadané charakteristickou vlastností uveď výčtem:

a) $D = \{x \in \mathbb{Z}; x = -x\}$ b) $E = \left\{x \in \mathbb{Q}; \sqrt{x^2} > |x|\right\}$

c) $F = \{x \in \mathbb{Z}; |x| > x\}$

a) $D = \{x \in \mathbb{Z}; x = -x\}$ $\Rightarrow$ celá čísla sama k sobě opačná $\Rightarrow$ $D = \{0\}$ (Množina *D* obsahuje číslo 0, není tedy prázdná)

b) $E = \left\{x \in \mathbb{Q}; \sqrt{x^2} > |x|\right\}$ $\Rightarrow$ víme, že platí $\sqrt{x^2} = |x|$ $\Rightarrow$ $E = \{\ \} = \emptyset$ (Množina *E* neobsahuje žádné číslo, nazývá se prázdná množina)

c) $F = \{x \in \mathbb{Z}; |x| > x\}$ $\Rightarrow$ podmínka platí pro záporná čísla $\Rightarrow$ $F = \{-1; -2; -3; ...\}$ (nekonečná množina, nemá konečný počet prvků, zápis výpisem není zcela korektní)

**Př. 3:** Následující množiny zadané výčtem uveď charakteristickou vlastností:

a) $A = \{1; 2; 3\}$ b) $C = \emptyset$

c) $G = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

pro každý bod existuje více možností, například:

a) $A = \{1; 2; 3\}$ $A = \{x \in \mathbb{N}; x < 4\}$

b) $C = \emptyset$ $C = \{x \in \mathbb{R}; x = x + 1\}$

c) $G = \{-2; -1; 0; 1; -2\}$ $G = \{x \in \mathbb{Z}; |x| \leq 2\}$

**Podmnožina ( $\subset$ )**

Množina *B* je podmnožinou množiny *A*, právě když každý prvek *B* je zároveň prvkem *A*.
Píšeme $B \subset A$.

**Př. 4:** Je dána množina $A = \{1; 2; 3; \pi\}$. Urči, které z následujících množin jsou jejími podmnožinami:

a) $A = \{1; 2; 3; \pi\}$ b) $B = \{1; \pi\}$

c) $C = \{0; 1\}$ d) $D = \{\ \} = \emptyset$

a) $A = \{1; 2; 3; \pi\}$ $A \subset A$ (Každá množina je podmnožinou sama sebe)

b) $B = \{1; \pi\}$ $B \subset A$

c) $C = \{0; 1\}$ $C \not\subset A$ (0 není v *A*)

d) $D = \{\ \} = \emptyset$ $D \subset A$ (Prázdná množina je podmnožinou libovolné množiny)

**Pedagogická poznámka:** Zajímavé jsou body a) a d). Hlavně bod a) je důležitý. Studenti neoznačí *A* za podmnožinu *A*, protože mají představu (bez racionálního důvodu), že podmnožina *A* musí být něco jiného než množina *A*. Tato představa je pro ně důležitější než definice, podle které by mohli rozhodnout správně (oni se o to ani nepokusí). Diskuse nad špatným řešením by měla zdůrazňovat fakt, že při řešení neuspěli, protože místo uplatňování pravidla, dali na neodůvodněné představy.

**Př. 5:** Vypiš všechny podmnožiny množiny $A=\{1;2;3;\pi\}$

Dobré vypisovat podle počtu prvků, systematicky:
0 prvků: $\emptyset$ (je tam vždy)
1 prvek: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{\pi\}$
2 prvky: $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;\pi\}$, $\{2;3\}$, $\{2;\pi\}$, $\{3;\pi\}$
3 prvky: $\{2;3;\pi\}$, $\{1;3;\pi\}$, $\{1;2;\pi\}$, $\{1;2;3\}$
4 prvky: $A=\{1;2;3;\pi\}$

**Dodatek:** Mezi jednoprvkovými a tříprvkovými podmnožinami je vztah – ke každé jednoprvkové patří tříprvková, kde dotyčný prvek chybí.

**Pedagogická poznámka:** Řeknu studentům, že by měli najít 16 podmnožin. Je zajímavé komu a jakým způsobem se podaří najít všechny. Jinak příklad je dobrou příležitostí k nácviku systematické práce.

**Rovnost množin**
Množiny A, B se rovnají tehdy, když každý prvek množin A je prvkem množiny B a zároveň každý prvek množiny B je prvkem množiny A. Píšeme $A=B$

**Př. 6:** Rozhodni, které z následujících množin se rovnají: $A=\{x\in\mathbb{Z};x>0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R};|x|\leq 0\}$, $C=\{x\in\mathbb{Z};|x-2|<2\}$, $D=\mathbb{N}$, $E=\{0\}$, $F=\{x\in\mathbb{N};x<4\}$, $G=\left\{x\in\mathbb{R};\sqrt{x^2}=x\right\}$, $H=\{x\in\mathbb{R};x\geq 0\}$

vypíšeme si jednotlivé množiny výčtem:

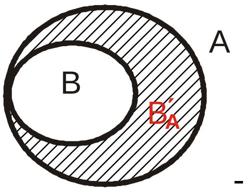
| | |
|---|---|
| $A=\{x\in\mathbb{Z};x>0\}$ | $A=\{1;2;3;...\}=\mathbb{N}$ |
| $B=\{x\in\mathbb{R};\|x\|\leq 0\}$ | $B=\{0\}$ |
| $C=\{x\in\mathbb{Z};\|x-2\|<2\}$ | $C=\{1;2;3\}$ |
| $D=\mathbb{N}$ | $D=\{1;2;3;...\}=\mathbb{N}$ |
| $E=\{0\}$ | $E=\{0\}$ |
| $F=\{x\in\mathbb{N};x<4\}$ | $F=\{1;2;3\}$ |
| $G=\left\{x\in\mathbb{R};\sqrt{x^2}=x\right\}$ | $G=\langle 0;\infty)$ |
| $H=\{x\in\mathbb{R};x\geq 0\}$ | $H=\langle 0;\infty)$ |

Z pravého sloupce je ihned vidět, že platí:
$A=D$, $B=E$, $C=F$, $G=H$

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je možné uvést diskusí o strategii řešení. Rovnost je snazší poznávat pokud jsou množiny dané výpisem a proto se vyplatí zapsat všechny množiny výpisem a poté porovnávat výpisy.

V případě, že je do konce hodiny málo času, je možné porovnávat pouze některé z množin.

**Doplněk množiny**
Je-li množina $B$ podmnožinou množiny $A$ nazýváme doplněk množiny $B$ v množině $A$ (zapisujeme $B'_A$) množina všech prvků $A$, které nepatří do množiny $B$.




Pokud je jasné v jaké množině se doplněk množiny $B$ tvoří, mluvíme jen o doplňku množiny $B$ a píšeme $B'$.

**Př. 7:** Urči doplňky následujících množin v množině $Z$.
a) $A = \{x \in Z; x < 3\}$
b) $B = N$
c) $C = \{x \in Z; x \geq |x|\}$
d) $D = \{x \in Z; |x| > 0\}$

| | | |
|---|---|---|
| $A = \{x \in Z; x < 3\}$ | $A = \{2;1;0;-1;-2;...\}$ | $A'_Z = \{x \in Z; x \geq 3\}$ |
| $B = N$ | $B = \{1;2;3...\}$ | $B'_Z = \{x \in Z; x \leq 0\}$ |
| $C = \{x \in Z; x \geq \lvert x \rvert\}$ | $C = \{0;1;2;...\}$ | $C'_Z = \{-1;-2;-3...\}$ |
| $D = \{x \in Z; \lvert x \rvert > 0\}$ | vše kromě nuly | $D'_Z = \{x \in Z; \lvert x \rvert \leq 0\} = \{0\}$ |

**Pedagogická poznámka:** Někteří studenti neoznačují doplňky názvem. Zkuste jim připomenout, že definici uvádí i pojmenování hledaných množin.

**Shrnutí:** Pokud důsledně uplatňujeme definice, pravděpodobnost chyby je malá.