1.2.7 Druhá odmocnina

Předpoklady: umocňování čísel na druhou

Pedagogická poznámka: Probrat obsah této hodiny není možné ve 45 minutách. Já osobně druhou část (usměrňování) probírám v další hodině, jejíž zbytek vyplní počítání sbírky nebo písemka.

Př. 1: Definuj druhou odmocninu z nezáporného čísla *a*.

Druhá odmocnina z nezáporného reálného čísla *a* je takové nezáporné číslo *x* pro které platí: $x^2 = a$. Píšeme: $x = \sqrt{a}$

Pedagogická poznámka: Velká většina studentů s případnou malou pomocí dokáže vymyslet správnou definici založenou na umocňování na druhou. Přesto upozorňuji na fakt, že odmocnina je definována pomocí mocnění (aniž bych zmiňoval inverzní funkci), aby si studenti uvědomili svázanost těchto dvou operací. Jediné, o co je nutné prodiskutovat je požadavek na odmocninu jako na nezáporné číslo, kde studentům připomínám výhody jednoznačné definice a důvody, které v matematice vedou na požadavek na jednoznačnost (opět bez toho, abychom mluvili o odmocnině jako o funkci).

Z definice vyplývá:

- $\sqrt{16} = 4$ (protože $4^2 = 16$)
- $\left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi$ (protože $\sqrt{\pi}$ je číslo, které po umocnění na druhou dá π)
- $\sqrt{-9}$ nelze (nejde udělat odmocninu ze záporného čísla)
- $\sqrt{16} \neq -4$ (sice platí $(-4)^2 = 16$, ale odmocnina musí být nezáporná)

Podmínka, že odmocnina je nezáporné číslo je důležitá. Zajišťuje nám jednoznačnost při určování odmocniny, existuje pouze jediné číslo, které může vyjít.

Př. 2: Odhadni s přesností na celá čísla velikost následujících odmocnin:
a) $\sqrt{7}$
b) $\sqrt{39}$
c) $\sqrt{\pi}$

a) $2 < \sqrt{7} < 3$, protože $4 = 2^2 < 7 < 9 = 3^2$
b) $6 < \sqrt{39} < 7$, protože $36 = 6^2 < 39 < 49 = 7^2$
c) $1 < \sqrt{\pi} < 2$, protože $1 = 1^2 < \pi < 4 = 2^2$

Pozor:

$\sqrt{16} = 4$ jediná hodnota	**X**	$x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = -4$ dvě hodnoty

	Proč?	
	ptáme se na různé věci	
Jaké nezáporné číslo umocněné na druhou se rovná 16?		Která čísla jsou kořeny rovnice $x^2 = 16$?
	a proto dostáváme různé odpovědi	

Pravidla pro počítání s odmocninami

Pro všechna nezáporná čísla *a, b* platí:

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\qquad$ $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\qquad$ $\sqrt{a+b} \rightarrow$ **nedá se roztrhnout!!!!!!!**

Proč jde roztrhnout odmocninu přes krát a nejde ji roztrhnout přes +?

$$a \cdot b = \left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b$$

$$a + b = \left(\sqrt{a+b}\right)^2 \neq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$$

Můžeme si to ukázat i na konkrétních číslech

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

Pomocí pravidel je možné počítat i odmocniny na první pohled příliš těžké:

$\sqrt{900} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30$

Př. 3: Vypočti následující odmocniny: $\sqrt{14400}$; $\sqrt{0,0081}$; $\sqrt{225}$.

$\sqrt{14400} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{144} = 10 \cdot 12 = 120$

$\sqrt{0,0081} = \sqrt{0,0001} \cdot \sqrt{81} = 0,01 \cdot 9 = 0,09$

$\sqrt{225} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$

Pedagogická poznámka: Pokud se objeví problémy s výpočtem $\sqrt{0,0081}$ přidávám několik příkladů na odmocniny desetinných čísel. Diskutovali jsme také o tom, že stejně jako odmocnina zmenší u mocnin deseti počet nul na polovinu, zmenší na polovinu i počet desetinných míst (pokud jde v obou případech o sudou mocninu).

Všechna čísla nejdou odmocnit úplně: $\sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ = **částečné odmocnění**

Př. 4: Částečně odmocni: $\sqrt{50}$; $\sqrt{72}$; $\sqrt{75}$.

$\sqrt{50} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = 5 \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{72} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{75} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{3}$

Poznámka: Při částečném odmocňování nezáleží na pořadí v jaké číslo na součin rozložíme: $\sqrt{50} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Pedagogická poznámka: Tento způsob používají studenti asi častěji a je třeba ho legitimovat.

Někdy je možné zjednodušit součin: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$.
Je zbytečné čísla strkat pod jednu odmocninu a násobit je mezi sebou $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$, u složitějších příkladů to zdržuje a zvětšuje pravděpodobnost chyby.

Jindy zase podíl: $\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{45}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$

Př. 5: Zjednoduš součiny:
a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{27}$ c) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{24}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$
b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$
c) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{36} = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$

Pedagogická poznámka: Poslední příklad je často řešen následovně:
$\sqrt{12} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} =$
$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72$
Odmocnin je ve výrazu tolik, že je snadné některou přehlédnout. Doporučuju upozornit na dodržování zásady KISS (keep it small and stupid) o níž se mluví v hodině 1604.
Jinak jde o podobný problém jako při násobení zlomků v hodině 1205. Průběžně se snažím na takových příkladech upozorňovat na fakt, že nestačí pouze umět pravidla a správně je používat. Je nutné postupovat tak, aby student měl v každém okamžiku kontrolu nad příkladem a výpočet příliš nebobtnal.

Př. 6: Zjednoduš podíly:
a) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{75}}$ c) $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{27}}$

a) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \sqrt{4} = 2$ nebo také: $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2$
b) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}}{\sqrt{3}\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{7}}{5}$ nebo také: $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{75}} = \sqrt{\frac{21}{75}} = \sqrt{\frac{7}{25}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{7}}{5}$
c) $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$ nebo také: $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{33}{27}} = \sqrt{\frac{11}{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$

Usměrnění zlomku

Takové upravení zlomku, aby se odmocnina nevyskytovala ve jmenovateli.
Historicko-estetické důvody – v předkalkulačkové době bylo těžké určit hodnotu zlomku, když byla ve jmenovateli, kterým se dělí, odmocnina s nekonečným rozvojem (ono se špatně dělí už tříciferným číslem natož číslem, které má cifer nekonečně mnoho).

Mám zlomek $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Potřebuju vynásobit jmenovatel $\sqrt{2}$: $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ nejde, změnil bych zlomek na jiné číslo, násobit můžu pouze jedničkou (ta ho nezmění) $\Rightarrow$ zkusím vynásobit zlomkem $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ přesně to jsem potřeboval

Př. 7: Usměrni zlomky:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ d) $\frac{9}{\sqrt{18}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

c) $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ - rozšiřuju jen $\sqrt{3}$, 2 mi ve jmenovateli nevadí

d) $\frac{9}{\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ - nejdřív zlomek zjednoduším a pak teprve rozšiřuju

Pedagogická poznámka: Bod a) spočítají všichni, už v b) ale mají někteří problémy s 5 v čitateli, v c) se zbytečně rozšiřuje i 2.

Můžeme usměrnit i složitější zlomky, třeba $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Zkusíme klasiku: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ - odmocnina nezmizela

Další pokus: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-2\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}}$,

odmocnina stále žije a zlomek je daleko složitější
V čem je problém?
Jmenovatel jsem umocňoval vzorcem $(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$, zkrachovalo to kvůli členu $2ab$ ($a = \sqrt{2}$)
$\Rightarrow$ hledám vzorec, který nemá tento člen $\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$.

Nový pokus: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{1}=\sqrt{2}+1$

$a\ -b \qquad (a-b)\cdot(a+b)=\ a^2\ -\ b^2$

Pedagogická poznámka: Moc bych se přimlouval, aby studenti dostali možnost zkusit usměrnění zlomku $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ a společně nalézt správné řešení. Jde i o nácvik obecné schopnosti řešit problémy:
1. pokus
2. hledání zádrhele
3. odstranění zádrhele

Př. 8: Usměrni zlomky:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{9}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{6}}{\sqrt{4}-\sqrt{9}}=\frac{2-\sqrt{6}}{2-3}=\frac{2-\sqrt{6}}{-1}=\sqrt{6}-2$

Př. 9: (BONUS) Usměrni zlomek $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Odmocniny nejde odstranit najednou, zkusím to postupně. $1+\sqrt{2}$ budu brát jako jedno číslo.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}=$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{2\cdot 2}=\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Shrnutí: Odmocnina z a je kladné číslo, které se po umocnění druhou rovná a $\Rightarrow$ souvisí s umocňováním a chová se podobně.