## 1.2.6 Reálná čísla

**Předpoklady:** 1201, 1204, 1205

- značíme $\mathbb{R}$

Reálná čísla jsou čísla, kterými se vyjadřují délky úseček, čísla jim opačná a 0 $\Rightarrow$

- Každé reálné číslo je na číselné ose znázorněno právě jedním bodem.
- Každý bod číselné osy je obrazem právě jednoho reálného čísla.

jsou čísla racionální ($\mathbb{Q}$) a čísla iracionální (např. $\sqrt{2}, \pi$ - nedají se zapsat zlomkem), která zaplnila mezery v číselné ose

iracionální čísla nelze zapsat ve tvaru $\frac{p}{q}$ $\Rightarrow$ lze zapsat pouze nekonečným neperiodickým rozvojem

**Dodatek:** Obor čísel iracionálních se nezavádí třeba také proto, že není uzavřený ani pro sčítání.

**Př. 1:** Rozhodni, které z vlastností určovaných u číselných operací (U, K, A, N, $^{-1}$) mají operace sčítání, odčítání, násobení a dělení v oboru reálných čísel. K jakým změnám oproti racionálním číslům došlo?

sčítání: U, K, A, N(0), $^{-1}$
odčítání: U, N(0), $^{-1}$
násobení: U, K, A, N(0), $^{-1}$ - kromě nuly
dělení: U, N(0), $^{-1}$ - kromě nuly
Žádné změny oproti racionálním číslům.

Reálná čísla mají všechny hezké vlastnosti racionálních čísel a v tuto chvíli splňují všechny naše požadavky.

**Zaokrouhlování:**

**Př. 2:** Zformuluj pravidlo pro zaokrouhlování na daný počet desetinných míst, tak aby podle něj mohl zaokrouhlovat i počítač.

Číslo zaokrouhlíme na místo daného řádu tak, že vynecháme všechny číslice napravo od něj a je-li první vynechaná číslice:
a) menší než 5, tak se všechny ponechané číslice nemění
b) větší nebo rovna 5, pak k číslu z ponechaných číslic připočteme jednotku jeho nejmenšího ponechaného řádu.

**Pedagogická poznámka:** Zejména přičítání jednotky nejmenšího ponechaného řádu bývá často nesprávně nahrazováno zvětšením poslední číslice o jedničku. Je dobré nechat studenty najít protipříklad.
Příklad svádí k diskusi o tom, co vlastně dovedou počítače a co lidé a že není úplně jednoduché přetlumočit postupy jasné každému z lidí i počítači.

**Pedagogická poznámka:** Studenti mají samozřejmě pocit, že zabývat se zaokrouhlováním je zcela zbytečné, příklady jim však působí docela značné problémy.

**Př. 3:** Zakrouhli hodnotu čísla $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716 93$ na:
a) setiny
b) tisíciny
c) desetitisíciny
d) bilióntiny (12 řádů za desetinou čárkou)

a) $\pi = 3,14$ - první vynechané číslo 1 $\Rightarrow$ ponechané číslice se nemění
b) $\pi = 3,142$ - první vynechané číslo 5 $\Rightarrow$ k číslu $\pi = 3,141$ připočtu $0,001$
c) $\pi = 3,1416$ - první vynechané číslo 9 $\Rightarrow$ k číslu $\pi = 3,1415$ připočtu $0,0001$
d) $\pi = 3,141592653590$ - první vynechané číslo 7 $\Rightarrow$ k číslu $\pi = 3,141592653589$ připočtu $0,000000000001$

Nula na konci v čísle $\pi = 3,141592653590$ je důležitá, říká nám s jakou přesností číslo známe.

Někdy provádíme **zaokrouhlování na platné číslice** – mezi **platné číslice** se počítají všechny číslice zaokrouhleného čísla, kromě nul, které stojí před první nenulovou číslicí a nul na konci čísla, které vznikly zaokrouhlením.
Například:
$23114$ (na 2 platná místa) $\doteq 23000$
23,41(na 2 plat. místa)$\doteq$ 23
7683,799(na 6 plat. míst)$\doteq$ 7683,80 $\Rightarrow$0 musí být na konci abych věděl, že je to na 6 platných míst

**Př. 4:** Zaokrouhli na tři platné číslice čísla:
6764; 321,5; 0,004588; 100456; 0,04997

$6764 \doteq 6760$ zaokrouhluji číslo 4, tedy dolů
$321,5 \doteq 322$ zaokrouhluji podle 5 tedy nahoru
$0,004588 \doteq 0,00459$ první platná číslice je 4, zaokrouhluji tedy podle 8
$100456 \doteq 100000$ nuly za jedničkou jsou platné číslice $\Rightarrow$ zaokrouhluji podle 4 dolů
$0,04997 \doteq 0,0500$ první platná číslice je 4, zaokrouhluji podle 7, vzniklé nuly jsou platné, vypovídají o přesnosti

**Př. 5:** Urči všechna celá čísla, která po zaokrouhlení na 1 platnou číslici dají číslo 20000.

Zaokrouhlujeme na jednu platnou číslici $\Rightarrow$ zaokrouhlujeme podle druhé číslice (řád tisíců)
Nejmenší číslo: musíme tisíce zaokrouhlit nahoru, nejmenší taková číslice je 5 $\Rightarrow$ 15000 (za 5 může být cokoliv, nejmenší jsou samé nuly)
Největší číslo: musíme tisíce zaokrouhlit dolů, největší taková číslice je 4 $\Rightarrow$ 24999 (za 4 může být cokoliv, největší jsou samé devítky)
$\Rightarrow$ Čísla v rozmezí 15000 – 24999.

**Př. 6:** Urči všechna celá čísla, která po zaokrouhlení na 2 platné číslice dají číslo 20000.

Zaokrouhlujeme na dvě platné číslice $\Rightarrow$ zaokrouhlujeme podle třetí číslice (řád stocek)
Nejmenší číslo: musíme stovky zaokrouhlit nahoru, nejmenší taková číslice je 5, před ní musí být 19, aby po přičtení jedničky vyšlo20 $\Rightarrow$ 19500 (za 5 může být cokoliv, nejmenší jsou samé nuly)
Největší číslo: musíme stovky zaokrouhlit dolů, největší taková číslice je 4 $\Rightarrow$ 20499 (za 4 může být cokoliv, největší jsou samé devítky)
Čísla v rozmezí 19500 – 20499 (na 2 plat. místa) $\doteq$ 20000

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklady jsou důležité zejména pro pochopení významu, které mají nuly psané za desetinnou čárkou pro určení přesnosti výsledku, zejména ve fyzice.

**Pravidla pro porovnávání reálných čísel:**

**Př. 7:** Doplň v pravidlech pro porovnávání reálných čísel nerovnosti napravo:
Pro každá tři reálná čísla *a*, *b*, *c* platí:
Jestliže: $a > b$ a zároveň $b > c$, pak $a \quad c$
Jestliže: $a > b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac \quad bc$
Jestliže: $a > b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac \quad bc$
Jestliže: $a > b$ a *c* je libovolné reálné číslo, pak $a+c \quad b+c$

Pro každá tři reálná čísla *a*, *b*, *c* platí:
Jestliže: $a > b$ a zároveň $b > c$, pak $a > c$
Jestliže: $a > b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac > bc$
Jestliže: $a > b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac < bc$
Jestliže: $a > b$ a *c* je libovolné reálné číslo, pak $a+c > b+c$

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je ukázkou pravidel, která je sice asi nutné napsat, ale studenti je vcelku ignorují, protože jsou naprosto samozřejmá.
V učebnici je často používáno předchozí řešení, jejich dopracování je zadáno jako příklad, tak se studenti musí alespoň minimálně zamyslet.

**Př. 8:** Porovnej $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ a $1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$:

Vím $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}>1$ a $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ podle posledního pravidla $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

**Př. 9:** Jsou dána záporná reálná čísla *a*, *b*, *c* a kladné reálné číslo *d*. Platí $a < b$. Rozhodni jaké znaménko mají čísla: $a+c$; $ab$; $cd$; $b-a$; $b-d$; $d-a$; $d(a+b)$; $c(a-b)$; $\frac{a+c}{b}$; $a^2+b^2$; $a^2-b^2$

$a+c<0$ - součet záporných čísel
$ab>0$ - součin záporných čísel
$cd<0$ - součin kladného a záporného čísla

$b-a>0$ - $a<b \Rightarrow a$ je na ose vlevo od $b \Rightarrow -a>0$ a je dál od nuly než $b$
$b-d<0$ - $b-d=b+(-d)<0$ - součet dvou záporných čísel
$d-a>0$ - $d-a=d+(-a)$ - součet kladných čísel
$d(a+b)<0$ - součin kladného a záporného čísla
$c(a-b)>0$ - součin záporných čísel, $a-b=-(b-a)$ viz. výše
$\frac{a+c}{b}>0$ - podíl dvou záporných čísel
$a^2+b^2>0$ - součet dvou kladných čísel
$a^2-b^2>0$ - $a$ je dál od nuly, jeho druhá mocnina je větší

**Pedagogická poznámka:** Cílem předchozího příklad je rozvíjet představivost o velikosti a znaménku čísel. Největší problémy jsou s výrazy $b-a$ a $a^2-b^2$. Studenti si neuvědomují, že i když je číslo $a<b$, jeho absolutní hodnota je větší než absolutní hodnota čísla *b*, protože obě čísla jsou nalevo od nuly. Studenti podvědomě soudí podle situace v kladné části číselné osy.

**Př. 10:** Jsou dána záporná reálná čísla *a*, *b*, *c* a kladné reálné číslo *d*. Platí $a<b$. Porovnej čísla:
a) $ac$ $bc$
b) $ad$ $bd$

$ac>bc$ - platí $a<b$, násobím záporným číslem
$ad<bd$ - platí $a<b$, násobím kladným číslem

**Shrnutí:** Při zaokrouhlování je nutné dát pozor na nuly. I nuly mohou být platnými číslicemi.