1.2.5 Racionální čísla II

Předpoklady: 1204

Počítání se zlomky

Př. 1: Doplň následující pravidla: Pro libovolná dvě racionální čísla $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ platí:

$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=$ $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=$

$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=$ $\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=$

Pro libovolná dvě racionální čísla $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ platí:

$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+rq}{qs}$ $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{ps-rq}{qs}$

$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$ $\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{ps}{qr}$ $r\neq 0$

Př. 2: Vypočti: a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{3}=$ b) $\frac{4}{5}-\frac{5}{9}=$

c) $\frac{14}{9}\cdot\frac{15}{28}=$ d) $\frac{6}{7}:\frac{9}{14}=$

a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{3}=\frac{3\cdot3+2\cdot7}{7\cdot3}=\frac{9+14}{21}=\frac{23}{21}$

b) $\frac{4}{5}-\frac{5}{9}=\frac{4\cdot9-5\cdot5}{5\cdot9}=\frac{36-25}{45}=\frac{11}{45}$

c) $\frac{14}{9}\cdot\frac{15}{28}=\frac{2\cdot7\cdot3\cdot5}{3\cdot3\cdot4\cdot7}=\frac{5}{6}$

d) $\frac{6}{7}:\frac{9}{14}=\frac{6}{7}\cdot\frac{14}{9}=\frac{6\cdot2\cdot7}{7\cdot3\cdot3}=\frac{4}{3}$

Poznámka: Čas, který je potřeba k spočtení zadání c) a d) v předchozím příkladu hodně závisí na způsobu výpočtu. Nejrychlejší je postupovat způsobem naznačeným v řešení – při násobení a dělení rozložit čísla na součinitele a snažit se o maximální zkrácení.

Postup $\frac{14}{9}\cdot\frac{15}{28}=\frac{210}{252}=\frac{105}{126}=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$, při kterém nejdříve čísla vynásobíme a pak zlomek krátíme je sice také možný, ale nesrovnatelně pomalejší a s daleko větší pravděpodobností chyby.

Pedagogická poznámka: Předchozí poznámku je nutné se studenty probrat. Vždycky se najdou tací, kteří nejdřív násobí a pak krátí. Zejména bez kalkulačky je to velmi riskantní.

Př. 3: Vypočti $\left[\frac{15}{4}\cdot\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\right]:\frac{22}{3}=$

$$\left[\frac{15}{4}\cdot\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\right]:\frac{22}{3}=\left[\frac{3}{2}+\left(\frac{3-2}{6}\right)\cdot 2\right]:\frac{22}{3}=\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\cdot 2\right]:\frac{22}{3}=\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\cdot 2\right]:\frac{22}{3}=$$

$$=\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right]:\frac{22}{3}=\left[\frac{9+2}{6}\right]:\frac{22}{3}=\frac{11}{6}\cdot\frac{3}{22}=\frac{1}{4}$$

Př. 4: Vypočti $\left[\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{8}-2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right]\cdot\left[\frac{7}{6}\cdot\frac{15}{49}:\frac{10}{21}+\frac{5}{4}\right]=$

$$\left[\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{8}-2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right]\cdot\left[\frac{7}{6}\cdot\frac{15}{49}:\frac{10}{21}+\frac{5}{4}\right]=\left[\frac{1}{4}-2\left(\frac{2\cdot 2-1\cdot 3}{3\cdot 2}\right):\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{21}{10}+\frac{5}{4}\right]=$$

$$\left[\frac{1}{4}-2\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\right]\cdot\left[\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right]=\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\right]\cdot 2=\left(\frac{3-5+8}{12}\right)\cdot 2=\frac{6}{12}\cdot 2=1$$

Pedagogická poznámka: Oba předchozí příklady jsou přípravou na kapitoly 1.6 – 1.9, ve kterých se studenti učí upravovat výrazy. Zdroje chyb jsou dva (stejně jako budou později) – špatná znalost pravidel (třeba krácení přes plus) a špatné opisování s nedbalou úpravou.

Porovnávání racionálních čísel

Chci porovnat $\frac{10}{13}$ a $\frac{18}{23}$.

Z poměrů není moc vidět, převedu na stejného jmenovatele, nebudu roznásobovat:

$\frac{10}{13}=\frac{10}{13}\cdot\frac{23}{23}$ $\qquad$ $\frac{18}{23}=\frac{18}{23}\cdot\frac{13}{13}$

Záleží jen na součinech v čitatelích, jmenovatele jsou stejné.

$10\cdot 23=230$

$18\cdot 13=234$

$\Rightarrow 10\cdot 23<18\cdot 13\Rightarrow\frac{10}{13}<\frac{18}{23}$.

Pedagogická poznámka: Nechávám studenty předchozí příklad počítat napůl samostatně. Je zajímavé sledovat, kdo si spočítá součin ve jmenovateli, který pro rozhodnutí o výsledku není vůbec potřeba.

Př. 5: Doplň následující pravidlo: Zlomek $\frac{p}{q}$ je větší než zlomek $\frac{r}{s}$, když

Zlomek $\frac{p}{q}$ je větší než zlomek $\frac{r}{s}$, když $ps > rq$.

Pamatovat si předchozí pravidlo je spíše nesmyslné. Je velká pravděpodobnost, že se spletete. Lepší je zapamatovat si postup, který k němu vedl.

Více čísel $\Rightarrow$
- vše na desetinná čísla (jedno z málo dobrých využití desetinných čísel, která jsou jinak v matematice spíše nepoužitelná)
- porovnávat dvojice mezi sebou (pozor na to, která porovnání jsou nutná a která kvůli výsledkům předchozích porovnávání už zbytečná)

Př. 6: Uspořádejte vzestupně čísla: $\frac{1}{3}$; $\frac{11}{32}$; 0,34

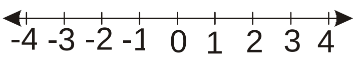
$\frac{1}{3} = 0{,}3333$ $\frac{11}{32} = 0{,}34375$

Platí: $\frac{1}{3} < 0{,}34 < \frac{11}{32}$

Číselná osa

Přímka s vyznačenou nulou (počátkem) a zvolenou jednotkovou velikostí na znázorňování čísel.

Vzdálenost čísla od počátku se rovná jeho absolutní hodnotě, kladná čísla kreslím napravo, záporná nalevo.



Každé racionální číslo dokážeme zobrazit na osu.

Na ose existují body, ke kterým nemůžeme přiřadit racionální číslo(například $\sqrt{2}$). $\Rightarrow$ ještě nejsme u konce s číselnými obory.

Shrnutí: