1.2.4 Racionální čísla I

Předpoklady: 1201, 1202, 1203

Racionální jsou všechna čísla, která lze zapsat ve tvaru zlomku

$\frac{p}{q}$ $\quad p \in Z$; $q \in N$ $\quad \frac{2}{1}$; $\frac{3}{15}$; $\frac{3}{2}$; $-\frac{6}{4}$;

- umožňují počítat s částmi celků (třeba polovina dortu)
- umožňují dělit $\Rightarrow$ $\frac{2}{3}$ je číslo vzniklé dělením $2:3$

Př. 1: Rozhodni, které z vlastností určovaných u číselných operací (U, K, A, N, $^{-1}$) mají operace sčítání, odčítání, násobení a dělení v oboru racionálních čísel. K jakým změnám oproti celým číslům došlo?

sčítání: U, K, A, N(0), $^{-1}$
odčítání: U, N(0), $^{-1}$
násobení: U, K, A, N(1), $^{-1}$ - kromě nuly
dělení: U, N(1), $^{-1}$ - kromě nuly

Pro racionální čísla (mimo nuly) existují inverzní čísla (pro 2 je to číslo $\frac{1}{2}$). Operace dělení je uzavřená (pokud nedělím nulou).

Čísla inverzní vzhledem k operaci násobení se nazývají převrácená čísla (převrácené hodnoty).

Proč nejde dělit nulou (vtloukají nám to do hlavy od třetí třídy)?
Počítám $6:3$, tedy hledám takové číslo, které po vynásobení 3 dá 6
(nebo jinak $6:3=2$, protože $2\cdot 3=6$, správnost výsledku při dělení se vždycky dá ověřit pomocí násobení).
Jaké číslo hledám, když se snažím spočítat $6:0$?
Číslo, které po vynásobení 0 dá 6. Takové číslo, ale neexistuje, protože všechna čísla po vynásobení nulou dají 0, žádné z nich nedá 6 $\Rightarrow$
nulou nelze dělit, protože nemáme k dispozici žádná čísla, která by mohla být výsledky této operace

Př. 2: Najdi převrácená čísla k číslům $3; -\frac{1}{12}; \frac{5}{16}, \frac{27}{4}$.

3	$\frac{1}{3}$	$3\cdot\frac{1}{3}=1$
$-\frac{1}{12}$	-12	$-\frac{1}{12}\cdot(-12)=1$
$\frac{5}{16}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{5}{16}\cdot\frac{16}{5}=1$
$\frac{27}{4}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{27}{4}\cdot\frac{4}{27}=1$

Poznámka: Racionální čísla jsou tak trochu podvod. Ve zlomku $\frac{2}{3}$ je stále ukryto dělení $2:3$, tento zlomek je tedy výsledkem dělení a když si ho chceme představit, tak opět pomocí dělení. Nic moc nového jsme se tedy nenaučili, spíše jsme výsledek dělení představili jako nové číslo.

Postřeh: $2:3=\frac{2}{3}$ $\quad 2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
$\Rightarrow$ Dělit je stejné jako násobit převrácenou hodnotou $\Rightarrow$ tímto způsobem mohu nahradit dělení násobením.
Výhody: násobení má K+A, zbude méně operací $\Rightarrow$ na VŠ se nedělí

Jedno racionální číslo je možné zapsat různými způsoby $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=...=\frac{36}{54}=...\Rightarrow$ všechny jsou matematicky rovnocenné, ale nejsou stejně jednoduché $\Rightarrow$
základní tvar: racionální číslo je v základním tvaru, když čísla *p* a *q* nemají žádného společného dělitele kromě 1 (základní tvar čísla $\frac{8}{6}$ je $\frac{4}{3}$)

Př. 3: Najdi základní tvar racionálního čísla $\frac{72}{108}$.

$$\frac{72}{108}=\frac{4\cdot18}{4\cdot27}=\frac{2\cdot9}{3\cdot9}=\frac{2}{3}$$

Př. 4: Najdi základní tvar racionálního čísla $\frac{504}{756}$.

$$\frac{504}{756}=\frac{2\cdot252}{2\cdot378}=\frac{2\cdot126}{2\cdot189}=\frac{3\cdot42}{3\cdot63}=\frac{3\cdot14}{3\cdot21}=\frac{7\cdot2}{7\cdot3}=\frac{2}{3}$$

Další možnosti zapsání racionálního čísla:
a) desetinným číslem
Například: $\frac{9}{10}=0,9$

Př. 5: Zapiš ve formě desetinného čísla $\frac{9}{250}$

Potřebuji ve jmenovateli mocninu deseti.
$$\frac{9}{250}=\frac{9}{250}\cdot\frac{4}{4}=\frac{36}{1000}=0,036$$

Tvar desetinného čísla můžeme získat i dělením:

$9:250=0,036$

90

900

1500

0

Desetinným rozvojem nejde zapsat každé racionální číslo.

Například $\frac{10}{33}=\frac{10}{3\cdot 11}$ ve jmenovateli je součin 3 a 11, nemůžu zlomek rozšířit tak, aby ve jmenovateli byla mocnina 10.

Př. 6: Rozhodni jakou podmínku musí splňovat racionální číslo ve tvaru zlomku, aby bylo možné jej zapsat jako desetinné číslo.

Racionální číslo je možné zapsat ve tvaru desetinného čísla jen tehdy, když číslo ve jmenovateli jde rozložit na součin čísel 2 a 5.

Jak zapsat racionální číslo, když nejde napsat jako desetinné číslo?

b) nekonečným periodickým desetinným rozvojem s vyznačenou periodou

zkusíme zapsat číslo $\frac{9}{11}$, desetinná místa se pokusím najít dělením:

$9:11=0,8181...$

90

20

90 opakují se zbytky $\Rightarrow$ opakují se i čísla ve výsledku

20

......

$\frac{9}{11}=0,\overline{81}$ - **ryze periodický rozvoj**, perioda je 81

Zkusíme najít rozvoj pro číslo $\frac{11}{12}$:

$11:12=0,9166...$

110

20

80

80

....

$\frac{11}{12}=0,91\overline{6}$ - **neryze periodický rozvoj**, perioda 6, předperioda 91

Poznámka: Zkus vymyslet důvod, proč se všechna racionální čísla dají zapsat pomocí nekonečného desetinného rozvoje s periodou nebo jako desetinné číslo. Proč žádné z nich nemá rozvoj neperiodický.

Př. 7: Převeď na zlomek v základním tvaru číslo $0,25$.

$$0,25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$$

Př. 8: Převeď na zlomek v základním tvaru číslo $2,375$.

$$2,375=\frac{2375}{1000}=\frac{475}{200}=\frac{95}{40}=\frac{19}{8}$$

c) smíšeným číslem
má význam pouze pro čísla větší než 1 a menší než –1

$$2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}$$

Př. 9: Převeď na zlomek smíšené číslo $3\frac{3}{7}$.

$$3\frac{3}{7}=3+\frac{3}{7}=\frac{21}{7}+\frac{3}{7}=\frac{24}{7}$$

Př. 10: Převeď na zlomek smíšené číslo $-2\frac{4}{5}$.

$$-2\frac{4}{5}=-\left(2+\frac{4}{5}\right)=-\left(\frac{10}{5}+\frac{4}{5}\right)=-\frac{14}{5}$$

Př. 11: Převeď na smíšené číslo zlomek $\frac{35}{6}$.

Hledám kolikrát se vejde 6 do 35 – 5x $\Rightarrow$ rozdělím $35=5\cdot 6+5$

$$\frac{35}{6}=\frac{30}{6}+\frac{5}{6}=5+\frac{5}{6}=5\frac{5}{6}$$

Př. 12: Převeď na smíšené číslo zlomek $-\frac{25}{3}$.

Podobně jako u předchozího příkladu:

$$-\frac{25}{3}=-\left(\frac{25}{3}\right)=-\left(\frac{24}{3}+\frac{1}{3}\right)=-\left(8+\frac{1}{3}\right)=-8\frac{1}{3}$$

Shrnutí: Racionální čísla mají vzhledem k násobení (s výjimkou nuly) hezké vlastnosti stejně jako vzhledem ke sčítání.