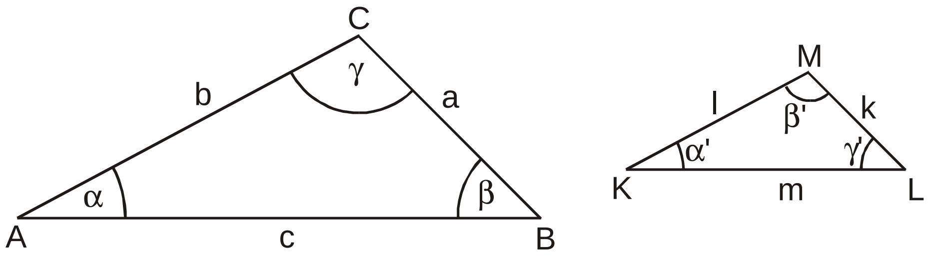
1.1.7 Podobnosti trojúhelníků, goniometrické funkce

Předpoklady: základní početní operace, úhel



Trojúhelníky *ABC* a *KLM* na našem obrázku mají stejný tvar (vypadají stejně), ale liší se velikostí. Říkáme, že jsou si podobné. Nutno vyjádřit exaktně – nejednodušeji tím, že *KLM* je několikrát (budeme psát *k* krát) menší než *ABC*. Každá jeho strana tedy musí být *k* krát menší než odpovídající strana trojúhelníků *ABC*.

Pomocí rovnic (**věta sss**):
$$|KL| = k|AB|$$
$$|LM| = k|BC|$$
$$|KM| = k|AC|$$

Toto lze matematicky ověřit.

Další věty o podobnosti:

Věta sus:
$$|KL| = k|AB|$$
$$\alpha = \alpha'$$
$$|KM| = k|AC|$$

Věta uu:
$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \beta'$$

(i třetí dvojice úhlů se musí rovnat, protože součet všech tří úhlů je $180°$).

Důsledek **věty uu** pro pravoúhlý trojúhelník:
Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou si podobné, pokud se shodují v jednom nepravém úhlu (jasné, druhý úhel do **věty uu** je ten pravý), tedy pro pravoúhlé trojúhelníky stačí jeden shodný nepravý úhel a hned jsou si podobné.

Př. 1: Rozhodni, které z následujících dvojic trojúhelníku jsou si podobné. U každé jsou zadány délky stran:
a) 12, 18, 24 36, 18, 27
b) 15, 20, 18 9, 11, 12

a) 12, 18, 24 36, 18, 27
Srovnám délky podle velikosti (abych věděl co k čemu patří) a pak spočtu poměry
12, 18, 24 18, 27, 36

$\frac{12}{18} = k = \frac{2}{3}$ $\frac{18}{27} = k = \frac{2}{3}$ $\frac{24}{36} = k = \frac{2}{3}$ Oba trojúhelníky jsou si podobné.

b) 15, 20, 18 9, 11, 12

Srovnám délky podle velikosti (abych věděl co k čemu patří) a pak spočtu poměry

15, 18, 20 9, 11, 12

$\frac{15}{9} = k = \frac{5}{3}$ $\frac{18}{11} = k = \frac{18}{11}$ $\frac{20}{12} = k = \frac{5}{3}$ Trojúhelníky si nejsou podobné.

Další protřepávání vzorců:

$|KL| = k|AB| \Rightarrow k = \frac{|KL|}{|AB|}$

$|LM| = k|BC| \Rightarrow k = \frac{|LM|}{|BC|}$

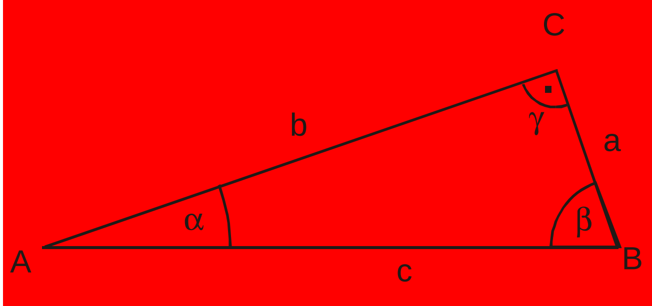
v obou případech je k stejné $\frac{|KL|}{|AB|} = k = \frac{|LM|}{|BC|}$ ještě upravíme na $\frac{|KL|}{|LM|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ (pomocí značení pro strany $\frac{a}{c} = \frac{k}{m}$).

Ze vztahu mezi stranami různých trojúhelníků jsme získali vztah mezi stranami téhož trojúhelníka. Odvozený vzorec se dá přečíst i takto: Dva trojúhelníky jsou si podobné, když mají stejný poměr kratší odvěsny a přepony (podle našeho obrázku).

Použijeme na pravoúhlý trojúhelník s úhlem α. (Všechny pravoúhlé trojúhelníky s úhlem α jsou si podobné) $\Rightarrow$ Pro libovolný pravoúhlý trojúhelník získám stejný poměr některých dvou stran například a/c (protilehlá odvěsna/přepona).

Poměr a/c je tedy dán velikostí úhlu α, je jedno přes jaký pravoúhlý trojúhelník ho spočtu $\Rightarrow$ Poměr a/c je vlastně funkcí úhlů. Tuto funkci nazýváme sinus a je velmi důležitá jako spojnice mezi úhly (tvarem) a stranami (velikostí).

Přehled goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníka:



sinus: $\sin\alpha = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{c}$

cosinus: $\cos\alpha = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{b}{c}$

tangens: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{a}{b}$

kotangens: $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{přilehlá}{protilehlá} = \frac{b}{a}$

Pomocí goniometrických funkcí můžeme například dopočítat velikosti zbývajících stran pravoúhlého trojúhelníku.

Poznámka: Vzorec $\sin\alpha = \frac{protilehlá}{přepona}$ platí vždy, vzorec $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ platí pouze v případě, že písmenkem *a* byla označena protilehlá odvěsna k úhlu α a písmenkem *c* přepona. Při dosazování je důležitý význam čísel ne jejich označení písmenem.

Př. 2: Pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 30°$ má velikost přepony $c = 15\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro β platí $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 30° = 60°$

Pro stranu *a*:

Vystupuje například v poměru: $\frac{protilehlá\,(a)}{přepona} = \frac{a}{c} = \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin\alpha \cdot c = \sin 30° \cdot 15 = 7{,}5\,\text{cm}$

Pro stranu *b*: $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos\alpha \cdot c = \cos 30° \cdot 15 = 13{,}00\,\text{cm}$

Pedagogická poznámka: Před počítáním s goniometrickými funkcemi je potřeba dát pozor na přepínání jednotek na kalkulačkách D-R-G. Vždycky se najde někdo, kdo má zapnutého něco jiného než stupně.

Př. 3: Pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 40°$ má velikost odvěsny $a = 9\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro β platí $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 40° = 50°$

Pro stranu *c*: $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{9}{\sin 40°} = 14{,}00\,\text{cm}$

Pro stranu *b*: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{9}{\operatorname{tg} 40°} = 10{,}73\,\text{cm}$

Ke každé goniometrické funkci existuje obrácená (správně inverzní) funkce, která z hodnoty poměru stran určuje velikost úhlu. Například pro sinus se jmenuje arcus sinu a na kalkulačkách se většinou značí $\sin^{-1}$.

Pro velikosti stran v pravoúhlém trojúhelníku platí Pythagorova věta:

$c^2 = a^2 + b^2$ **slovy**

$(velikost\ přepony)^2 = (velikost\ první\ odvěsny)^2 + (velikost\ druhé\ odvěsny)^2$

Př. 4: Pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem γ má velikosti odvěsen $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

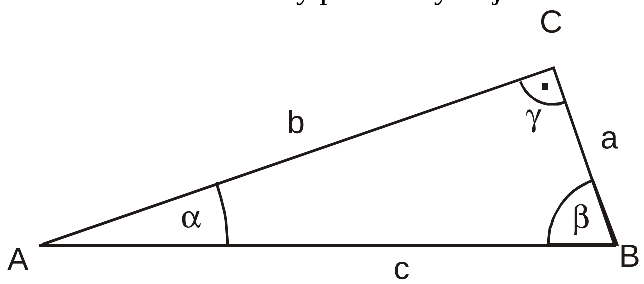
Pro stranu *c*: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\,\text{cm}$

Pro určení úhlů musíme použít obrácené funkce k funkcím goniometrickým.

Pro úhel α: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}87°$

Př. 5: Pro které hodnoty úhlu α platí $\sin\alpha > \cos\alpha$?

Nakreslíme si libovolný pravoúhlý trojúhelník



Platí: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Jmenovatele obou zlomků jsou stejné $\Rightarrow$ záleží zda je větší strana *a* nebo strana *b*. Strany *a*, *b* jsou odvěsny trojúhelníka, jsou stejné, když platí $\alpha = \beta = 45°$. Pokud bude $\alpha > 45°$, bude $a > b$ (proti většímu úhlu leží větší strana) a tedy i $\sin\alpha > \sin\beta$.

Shrnutí: Díky tomu, že jsou si všechny pravoúhlé trojúhelníky s úhlem α podobné můžeme zavést pro úhly goniometrické funkce jako například $\sin\alpha = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přepona}}$.