1.1.5 Poměry a úměrnosti II

Předpoklady: 1104

U následujících úloh je nutné poznat, zda jde o přímou nebo nepřímou úměrnost případně příklad, který není možné řešit ani jedním z obou postupů.

Pedagogická poznámka: Studenti příklady řeší sami. Kontrolu provádíme po 2, 3, 5 příkladě. Šestý příklad počítáme na tabuli, protože asi polovina studentů ho nedokáže spočítat sama.

Př. 1: Autobus jedoucí průměrnou rychlost 75 km/h urazí vzdálenost do hlavního města za 2,5 hodiny. Za jak dlouho urazí vzdálenost osobní automobil jedoucí průměrnou rychlost 85 km/h.

Vzdálenost nutná k uražení je stále stejná, při větší rychlosti bude čas kratší $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.

75 km/h … 2,5 hodiny
85 km/h … *x* hodin

$75 \cdot 2,5 = 85x$

$x = \frac{75 \cdot 2,5}{85} = 2,2$ hodiny

Automobil urazí vzdálenost za 2,2 hodiny.

Př. 2: Osamělý cyklista v úniku jede průměrnou rychlostí 42 km/h a do cíle závodu mu zbývá 60 km. Peloton, který jej stíhá, jede díky spolupráci více jezdců průměrnou rychlostí 47 km/h. Jaký náskok musí mít cyklista, aby jej peloton nedohonil?

potřebný náskok zjistím, když budu vědět, jakou vzdálenost by urazil během jízdy cyklisty v úniku peloton

větší rychlost $\Rightarrow$ větší vzdálenost $\Rightarrow$ přímá úměrnost

42 km/h … 60 km
47 km/h … *x* km

cyklista i peloton musí jet stejnou dobu

$\frac{60}{42} = \frac{x}{47}$

$x = \frac{60}{42} \cdot 47\,\text{km} = 67,1\,\text{km}$

potřebný náskok: $67,1 - 60\,\text{km} = 7,1\,\text{km}$

Cyklista by potřeboval náskok 7,1 km.

Dodatek: Při hodně striktním přístupu by cyklista potřebovat 7,2 km, protože jsme zaokrouhlovali dolů a náskok je tedy menší než nezaokrouhlená hodnota.

Př. 3: Při radioaktivním rozpadu 4 g látky X zbude po uplynutí poločasu rozpadu dlouhého 2 hodiny, vždy polovina existujících atomů. (například po prvních dvou hodin zbudou dva gramy látky). Kolik látky zbude po třech hodinách?

Příklad není možné řešit ani přímou ani nepřímou úměrností. Látka se nerozpadá rovnoměrně (během prvních dvou hodin se rozpadnou 2g, během druhých dvou už jen 1 g) $\Rightarrow$ nejde ani o přímou ani o nepřímou úměrnost.

Dodatek: Předchozí příklad je ukázkou exponenciální závislosti (probírá se v polovině druhého ročníku). Správný výsledek je $4\cdot(0,5)^{\frac{3}{2}} \doteq 1,4142$. Rozhodně není správně 1,5 g, které studenti udávají i když jde v jejich situaci o slušné přiblížení skutečnosti.

Př. 4: 15 l látky váží 117 kg. Kolik kg by vážilo 33 litrů látky?

15 litrů … 117 kg
33 litrů … x kg
Čim víc látky, tím víc váží $\Rightarrow$ přímá úměrnost
každý litr látky váží stejně: $\frac{117}{15}=\frac{x}{33}$

$x=\frac{117}{15}\cdot 33=257,4\,\text{kg}$

33 litrů látky bude vážit 257,4 kg.

Př. 5: Dvoukilové závaží vyrobené z látky o hustotě 7800 kg/m^3 má objem 0,26 litru. Jaký objem bude mít dvoukilové závaží vyrobené z látky o hustotě 2700 kg/m^3?

7800 kg/m^3 … 0,26 litru
2700 kg/m^3 … x litru

menší hustota, větší objem $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost
hmotnost závaží je pořád stejná
$7800\cdot 0,26=2700x$

$x=\frac{7800\cdot 0,26}{2700} 0,75\,\text{l}$

Závaží z látky o hustotě 2700 kg/m^3 by mělo objem 0,75 l.

Na závěr tři příklady na dvojitou trojčlenku:

Pedagogická poznámka: Následující příklady nejsou obtížné pokud si je dokážeme rozdělit na dvě úměrnosti. Bohužel právě to studenti takřka nikdy nedělají a snaží se je řešit najednou. Většinou je nechám, aby si to zkusili a pak je vedu k libovolnému rozdělení na dvě části.

Snažím se jim vysvětlit, že rozdělení na menší částí je obecnou metodou, jak řešit nepřehledné situace.

Př. 6: 10 studentů udělá za 6 hodin matematiky do sešitů 48 chyb. Kolik chyb udělá 30 studentů za 120 hodin?

V zadání je nečekaně mnoho údajů

10 studentů	…	6 hodin	…	48 chyb
30 studentů	…	120 hodin	…	x chyb

Počet chyb závisí na dvou číslech, obě se změnila $\Rightarrow$ rozdělím příklad na dva normální (více možností)

Změna počtu studentů:

10 studentů	…	6 hodin	…	48 chyb
30 studentů	…	6 hodin	…	x chyb

Prostřední sloupec má stejné hodnoty $\Rightarrow$ zatím neřeším

10 studentů	…	48 chyb
30 studentů	…	x chyb

Víc studentů, víc chyb $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow \frac{48}{10} = \frac{x}{30}$

$x = \frac{48}{10} \cdot 30 = 144$ chyb

Doplním do původního schématu:

10 studentů	…	6 hodin	…	48 chyb
30 studentů	…	120 hodin	…	x chyb
30 studentů	…	6 hodin	…	144 chyb

Změna počtu hodin:

30 studentů	…	6 hodin	…	144 chyb
30 studentů	…	120 hodin	…	x chyb

Počet studentů se nemění $\Rightarrow$ počítám bez něj

6 hodin	…	144 chyb
120 hodin	…	x chyb

Víc hodin, víc chyb $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow \frac{144}{6} = \frac{x}{120}$

$x = \frac{144}{6} \cdot 120 = 2880$ chyb

30 studentů udělá za 120 hodin 2880 chyb.

Př. 7: 6 dělníků vykope dva příkopy za 12 dní. Za kolik dní vykope 10 dělníků 3 příkopy?

V zadání je nečekaně mnoho údajů

6 dělníků … 2 příkopy … 12 dní
10 dělníků … 3 příkopy … x dní

Počet dní závisí na dvou číslech, obě se změnila $\Rightarrow$ rozdělím příklad na dva normální (více možností)

Změna počtu dělníků:
6 dělníků … 2 příkopy … 12 dní
10 dělníků … 2 příkopy … x dní

Prostřední sloupec má stejné hodnoty $\Rightarrow$ zatím neřeším
6 dělníků … 12 dní
10 dělníků … x dní
Víc dělníků, méně času $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost $\Rightarrow$ $6 \cdot 12 = 10 \cdot x$
$x = \frac{6 \cdot 12}{10} = 7{,}2$ dne

Doplním do původního schématu:
6 dělníků … 2 příkopy … 12 dní
10 dělníků … 3 příkopy … x dní
10 dělníků … 2 příkopy … 7,2 dne

Změna počtu příkopů:
10 dělníků … 2 příkopy … 7,2 dne
10 dělníků … 3 příkopy … x dní

Počet dělníků se nemění $\Rightarrow$ počítám bez něj
2 příkopy … 7,2 dne
3 příkopy … x dní
Víc příkopů na vykopání, víc dnů práce $\Rightarrow$ přímá úměrnost $\Rightarrow$ $\frac{7{,}2}{2} = \frac{x}{3}$
$x = \frac{7{,}2}{2} \cdot 3 = 10{,}8$ dne

10 dělníků vykope 3 příkopy za 10,8 dne..

Př. 8: 5 čerpadel o výkonu 50 l/s napustí bazén za 30 minut. Za jak dlouho napustí bazén 3 čerpadla o výkonu 60 l/s.

5 čerpadel … 50 l/s … 30 min
3 čerpadla … 60 l/s … x min

Počet minut závisí na dvou číslech, obě se změnila $\Rightarrow$ rozdělím příklad na dva normální (více možností)

Změna počtu čerpadel:

5 čerpadel	…	50 l/s	…	30 min
3 čerpadla	…	50 l/s	…	x min

Prostřední sloupec má stejné hodnoty $\Rightarrow$ zatím neřeším

5 čerpadel … 30 min
3 čerpadla … x min

Víc čerpadel, méně času $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost $\Rightarrow$ $5 \cdot 30 = 3 \cdot x$

$$x = \frac{5 \cdot 30}{3} = 50 \quad \text{minut}$$

Doplním do původního schématu:

5 čerpadel	…	50 l/s	…	30 min
3 čerpadla	…	60 l/s	…	x min
3 čerpadla	…	50 l/s	…	50 min

Změna výkonu čerpadel:

3 čerpadla	…	50 l/s	…	50 min
3 čerpadla	…	60 l/s	…	x min

Počet čerpadel se nemění $\Rightarrow$ počítám bez něj

50 l/s … 50 min
60 l/s … x min

Větší výkon čerpadel, kratší čas napouštění $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost $\Rightarrow$ $50 \cdot 50 = x \cdot 60$

$$x = \frac{50 \cdot 50}{60} = \frac{125}{3} \doteq 41,67 \quad \text{minut}$$

3 čerpadla o výkonu 60 l/s naplní bazén za 42 minut.

Shrnutí: Při řešení příkladů, kde nevíme předem zda jde o přímou nebo nepřímou úměrnost, musíme nejdříve přemýšlet o tom, zda situace splňuje podmínky úměrnosti.