1.1.2 Kvadratické rovnice (dosazení do vzorce) II

Předpoklady: 1101

Př. 1: Vyřeš s pomocí kalkulačky na tři desetinná místa kvadratické rovnice:
a) $x^2-3x-3=0$
b) $5x^2+14x-40=0$

a) $x^2-3x-3=0 \Rightarrow a=1;\ b=-3;\ c=-3$

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{9+12}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}\doteq\frac{3\pm4,5825}{2}$$

$$x_1=\frac{3-4,5825}{2}=-0,791$$

$$x_2=\frac{3+4,5825}{2}=3,791$$

b) $5x^2+14x-40=0 \Rightarrow a=5;\ b=14;\ c=-40$

$$x_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4\cdot5\cdot(-40)}}{2\cdot5}=\frac{-14\pm\sqrt{196+800}}{10}=\frac{-14\pm\sqrt{996}}{10}\doteq\frac{-14\pm31,5594}{10}$$

$$x_1=\frac{-14-31,5594}{10}=-4,556$$

$$x_2=\frac{-14+31,5594}{10}=1,756$$

Pedagogická poznámka: Způsob, jakým je předchozí příklad pomocí kalkulačky řešen má samozřejmě daleko do ideálu. Ale opět jde o snahu neřešit příliš mnoho věcí najednou, kalkulačka je použita pouze pro výpočet odmocniny a následné počítaní s tímto výsledkem. Lepší způsob, jak používat kalkulačku, je popsán v hodině 1103.

Př. 2: U následujících rovnic urči hodnoty koeficientů *a*, *b*, *c*:
a) $2x^2+x-x\sqrt{2}-\sqrt{3}=0$
b) $\sqrt{2}x^2-x-x\cdot3\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=0$
c) $\pi+x^2-x+2x\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=0$

a) $2x^2+x-x\sqrt{2}-\sqrt{3}=0$
$a=2$, $b=1-\sqrt{2}$, $c=-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2}x^2-x-x\cdot3\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=0$
$a=\sqrt{2}$, $b=-1-3\sqrt{2}$, $c=2-\sqrt{3}$

c) $\pi + x^2 - x + 2x\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 0$
$a = 1$, $b = 2\sqrt{3} - 1$, $c = \pi + \sqrt{3} - 1$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je velmi důležitý. Nejčastější řešení zadání a) je $b = -\sqrt{2}$. Studenti mají jednak zakořeněný podvědomý odpor k odmocninám a jednak se nikdy nesetkali s příkladem, kde by byl jeden z koeficientů „složený ze dvou čísel“. Největší překážkou pro správné vyřešení příkladu je pro ně fakt, že očekávají, že každý z koeficientů musí být „jedno číslo“. Upozorňuji je že:
a) výraz $1 - \sqrt{2}$ je také „jedno číslo“
b) pravidlo o „jednom čísle“ jsme nikdy neprobírali a není pro něj žádný důvod
c) je nutné se držet pravidla „*b* jsou všechna čísla před *x*“
Většině studentů pomůže, když prstem v zadání zakryjete člen $-x\sqrt{2}$, správně určí, že by platilo $b = 1$ když dám prst pryč uznají, že člen x nemůže zmizet.

Př. 3: (BONUS) Vyřeš kvadratické rovnice dosazením ze zadaného tvaru (bez vynásobení rovnice):
a) $\frac{2}{3}x^2 + x - \frac{2}{3} = 0$
b) $4x^2 + \frac{x}{3} - 2 = 0$

a) $\frac{2}{3}x^2 + x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3};\ b = 1;\ c = -\frac{2}{3}$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}}{2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{16}{9}}}{\frac{4}{3}} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{25}{9}}}{\frac{4}{3}} = \frac{-1 \pm \frac{5}{3}}{\frac{4}{3}}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1 + \frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

b) $4x^2 + \frac{x}{3} - 2 = 0 \Rightarrow a = 4;\ b = \frac{1}{3};\ c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + 32}}{8} = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{289}{9}}}{8} = \frac{-\frac{1}{3} \pm \frac{17}{3}}{8}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{3} - \frac{17}{3}}{8} = \frac{-\frac{18}{3}}{8} = -\frac{18}{24} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{17}{3}}{8}=\frac{\frac{16}{3}}{8}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu samozřejmě nešlo o co nejsnazší získání kořenů, ale dosazení zlomků do vzorce a o výpočty s nimi.

Pedagogická poznámka: Následující příklady mají svoje kouzlo, protože zejména v příklade 5 b) dosazují studenti do vzorce něco daleko složitějšího než obvykle chápou pod pojmem číslo. Bohužel jakákoliv práce s odmocninami je stále vzdálenější jejich schopnostem. Proto jsou následující příklady bonusové a s celou třídou je počítám pouze při dostatku času.

Př. 4: (BONUS) Vyřeš kvadratickou rovnici $x^2-2x-1=0$.

$x^2-2x-1=0 \Rightarrow a=1;\ b=-2;\ c=-1$

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(1\pm\sqrt{2}\right)}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

$x_1=1-\sqrt{2}$

$x_2=1+\sqrt{2}$

Př. 5: (BONUS) Vyřeš kvadratické rovnice:

a) $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$

b) $x^2-2\sqrt{2}x-1-\sqrt{2}=0$

a) $x^2-3\sqrt{2}x+4=0 \Rightarrow a=1;\ b=-3\sqrt{2};\ c=4$

$$x_{1,2}=\frac{-(-3\sqrt{2})\pm\sqrt{(3\sqrt{2})^2-4\cdot 4\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{3^2\cdot\sqrt{2}^2-16}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-16}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

b) $x^2-2\sqrt{2}x-1-\sqrt{2}=0 \Rightarrow a=1;\ b=-2\sqrt{2};\ c=-1-\sqrt{2}$

$$x_{1,2}=\frac{-(-2\sqrt{2})\pm\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4\cdot 1\cdot(-1-\sqrt{2})}}{2\cdot 1}=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{2^2\sqrt{2}^2+4+4\sqrt{2}}}{2}=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8+4+4\sqrt{2}}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{12+4\sqrt{2}}}{2}=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{4\left(3+\sqrt{2}\right)}}{2}=\frac{2\sqrt{2}\pm 2\sqrt{3+\sqrt{2}}}{2}=\frac{2\left(\sqrt{2}\pm\sqrt{3+\sqrt{2}}\right)}{2}$$

$x_{1,2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{3+\sqrt{2}}$

$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{2}}$

$x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3+\sqrt{2}}$

Pedagogická poznámka: Je možné vést diskuse, zda je vhodné následující část hodiny vůbec zařazovat. Já jsem přesvědčen, že ano, studenti si cvičí, že jejich aktuální činnost můžeme mít zajímavý obecný přesah.
Zařazení vzorce pro absolutní hodnotu komplexního čísla samozřejmě odporuje základnímu požadavku na to, aby studenti počítali pouze s tím, čemu rozumí a nepoužívali matematiku jako kuchařku. Na druhou stranu zajímavým způsobem rozšiřuje hodinu a studenti mají často z faktu, že spočítají snadno něco, co se probírá až ve třeťáku, nefalšovanou radost.
Je třeba na tuto část hodiny nechat alespoň 25 minut.

Dosazení do vzorce pro kořeny kvadratické rovnice je speciálním příkladem matematického postupu „dosazení do vzorce“. Tento postup má dva kroky:

1. Nalezení čísel, která reprezentují písmene ve vzorci
2. Napsání čísel do vzorce místo písmen.

Dosazováním můžeme používat i vzorce, jejichž původ a smysl přesahuje naše okamžité matematické znalosti.

Př. 6: Komplexní číslo z se dá zapsat ve tvaru (nazývá se algebraický) $z = a + ib$, kde a a b jsou reálná čísla a číslo i je takzvaná komplexní jednotka (číslo s velmi zvláštními vlastnostmi). Absolutní hodnota komplexního čísla se určí podle vzorce
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Urči absolutní hodnotu komplexního čísla $z = 3 + 4i$.

Zřejmě platí $a = 3$, $b = 4$.
Platí $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Pedagogická poznámka: Většina chyb v předchozím příkladě spočívá v dosazení $b = 4i$. Neprozrazujte to studentům hned, jen je upozorněte, že udělali chybu a mají si pořádně přečíst zadání.

Př. 7: S pomocí předchozího příkladu urči absolutní hodnotu komplexního čísla $z = \sqrt{2} - i\sqrt{7}$.

$a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{7}$.
Platí $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9} = 3$.

Pedagogická poznámka: Pozor, značná část studentů dojde ke správnému výsledku špatným postupem: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9} = 3$. Nesmíte přistoupit na to, že v takovém případě vyřešili příklad správně.

Př. 8: Pomocí vzorce pro třetí mocninu součtu $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ vypočti $(2x-1)^3$.

platí: $a = 2x$, $b = -1$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(2x-1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(-1) + 3(2x)(-1)^2 + (-1)^3 = 8x^3 + 3\cdot 4x^2(-1) + 3\cdot 2x\cdot 1 - 1 =$

$= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

Pedagogická poznámka: V příkladu jsou dva těžké momenty. Jednak stanovení $a = 2x$, $b = -1$ a jednak dosazení do vzorce, kde je nutné psát závorky. Zejména studenti, kteří pospíchají v příkladu nasekají spoustu chyb. Jde o dobré cvičení na pomalý a důsledný postup.

Př. 9: Pomocí vzorce pro druhou mocninu součtu $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vypočti $(x-2a)^2$.

platí: $a = x$, $b = -2a$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(x-2a)^2 = x^2 + 2(x)(-2a) + (-2a)^2 = x^2 - 4ax + 4a^2$

Pedagogická poznámka: Příklad testuje psychický blok, kdy se za *a* dosazuje *x* a za *b* –2*a*.

Shrnutí: Stejným způsobem jako jsme dosazovali do vzorce pro kvadratickou rovnici, můžeme dosazovat i do dalších vzorců.