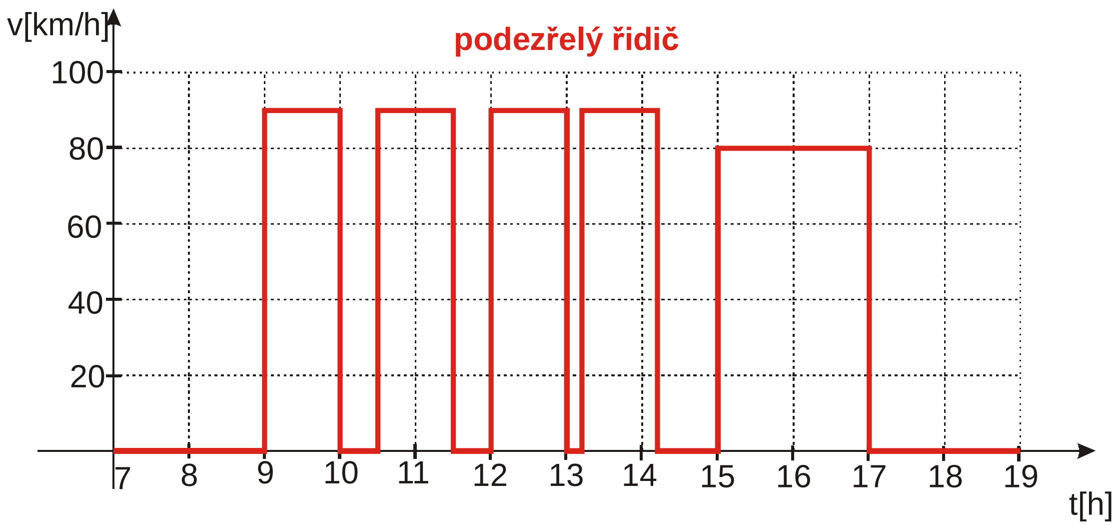
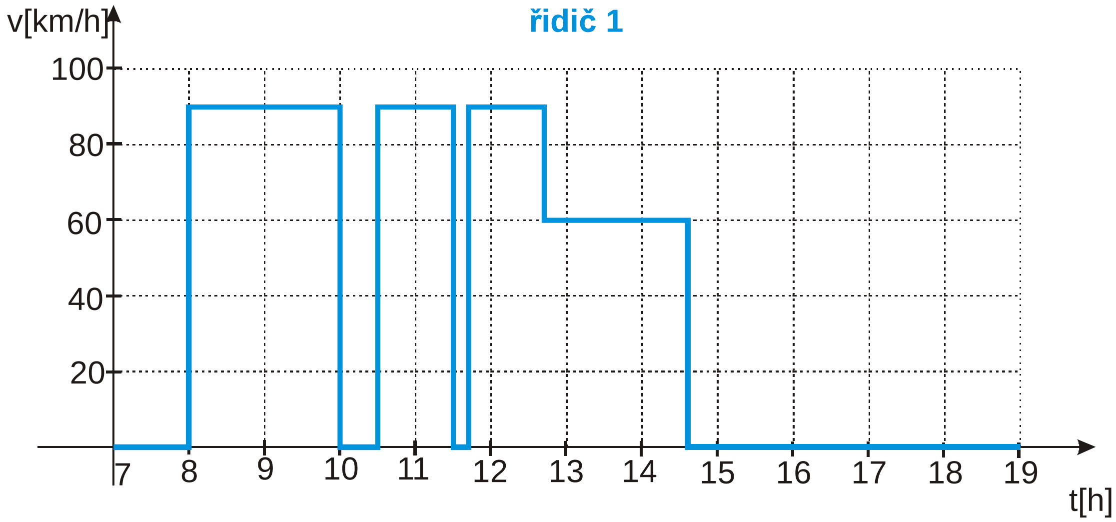
1.1.5 Rovnoměrný pohyb

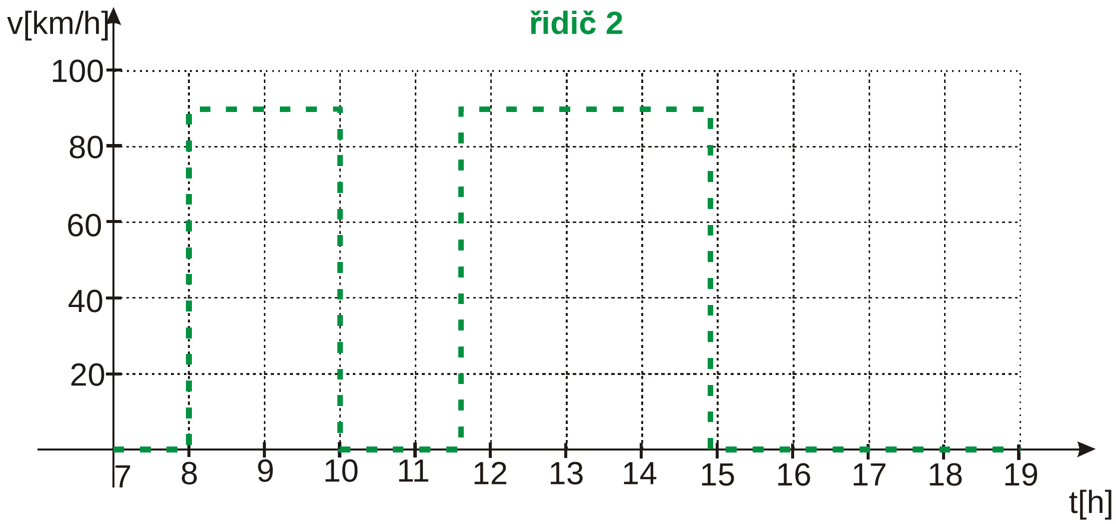
Příklady vyšší obtížnosti

Sbírka C - Př. 1.1.5.1

Při sledování drogové mafie byly podezřelí zaměstnanci dopravní firmy. U jednoho z řidičů bylo opravdu zjištěno převzetí zásilky od kurýra v Budapešti. Při zásahu v Praze byl však jeho automobil prázdný. Policisté si vzali kotoučky od tohoto automobilu a ostatních tří aut téže firmy a podařilo se jim zjistit, který z řidičů spolupracoval se zadrženým řidičem. Při dalším zásahu již byli úspěšní. Který z řidičů to byl? Kotouček je papírový kroužek, na který zaznamenává speciální přístroj (tachograf) průběh jízdy každého nákladního automobilu. V podstatě jde o graf závislosti rychlosti na čase. Graf všech řidičů jsou nakresleny níže. Všichni vyjížděli ten den z Budapešti a do Prahy jeli po stejné trase.

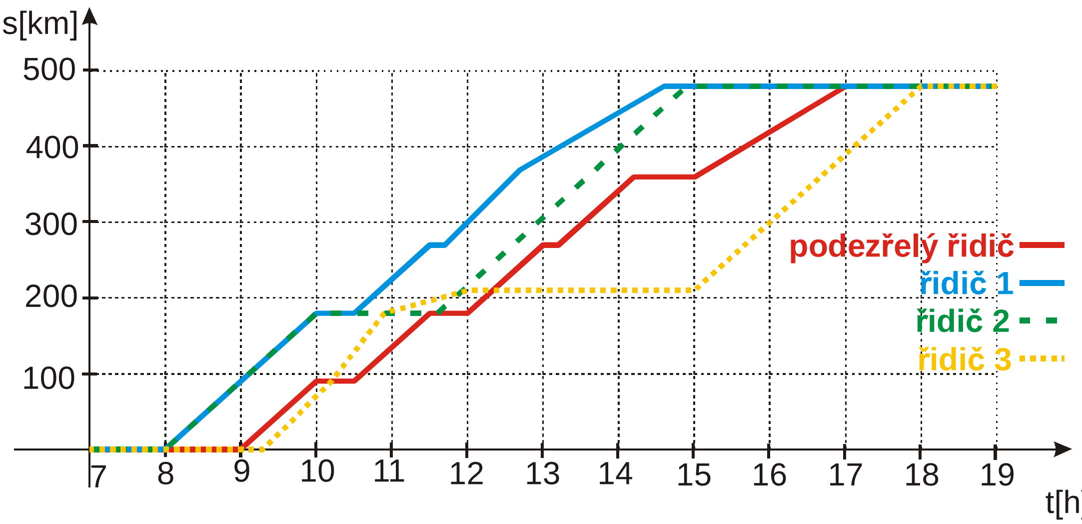






Fyzikální rozbor situace:
Musíme zjistit zda se některý z řidičů během cesty nesetkal s podezřelým řidičem a nemohl od něj převzít zásilku. Známo průběh rychlostí všech řidičů, víme, že všichni vyjížděli ze stejného místa a jeli po stejné trase. Můžeme tedy nakreslit do jednoho obrázku grafy časových závislostí jejich poloh. Pokud se některé dva grafy setkají ve chvíli, kdy oba řidiči stojí, mohli si předat drogu.

Řešení:
Nakreslili jsme si grafy polohy pro všechny řidiče do jednoho obrázku.



Z obrázku je vidět, že s podezřelým řidičem se setkal pouze řidič číslo 2, na 180 km přibližně v půl dvanácté.

Sbírka C - Př. 1.1.5.2

Zadání:
První část cyklistické trasy tvoří stoupání dlouhé 3 km, zbylou část klesání dlouhé 13 km. Pavlova průměrná rychlost na celé trase byla dvojnásobkem jeho rychlosti v první části trasy, jenž byla o $16\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ menší než na druhé části trasy. Za jak dlouho ujel Pavel celou trasu?

Výpis známých veličin:
$s_1 = 3\,\text{km}$ $\quad s_2 = 13\,\text{km}$ $\quad t = ?$

Fyzikální rozbor situace:
Použijeme vztahy pro rovnoměrný pohyb (v obou částech se Pavel pohyboval přibližně rovnoměrně) a vztah pro průměrnou rychlost. Vyjdeme z toho, že celkový čas, který Pavel potřeboval na ujetí trasy, můžeme vyjádřit pomocí součtu časů, za které ujel jednotlivé úseky, i pomocí celkové dráhy a průměrné rychlosti.

Řešení:
$t = t_1 + t_2$ nyní budeme snižovat počet neznámých v rovnici.

Platí: $t = \frac{s}{v_p}$, $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$ a $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$ dosadíme do původní rovnice.

$\frac{s}{v_p} = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}$. Celková dráha je součtem obou úseků $s = s_1 + s_2$, všechny rychlosti můžeme pomocí podmínek v zadání vyjádřit pomocí rychlosti v prvním úseku.

Platí: $v_p = 2v_1$ (průměrná rychlost na celé trase byla dvojnásobkem jeho rychlosti v první části trasy) a $v_2 = v_1 + 16$ (rychlost v první části trasy byla o $16\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ menší než v druhé části trasy).

Dosadíme do rovnice:

$$\frac{s_1 + s_2}{2v_1} = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_1 + 16}$$

Délky obou úseků známe, v rovnici zbývá poslední neznámá, kterou můžeme vypočítat.

$$\frac{3+13}{2v_1}=\frac{3}{v_1}+\frac{13}{v_1+16}$$

$$\frac{16}{2v_1}=\frac{3}{v_1}+\frac{13}{v_1+16}$$

$$\frac{8}{v_1}=\frac{3}{v_1}+\frac{13}{v_1+16} \quad /\cdot v_1\left(v_1+16\right)$$

$$8\left(v_1+16\right)=3\left(v_1+16\right)+13v_1$$

$$8v_1+128=3v_1+48+13v_1$$

$$80=8v_1$$

$$v_1=10\,\mathrm{km/h}$$

Průměrná rychlost $v_p=2v_1=2\cdot 10\,\mathrm{km/h}=20\,\mathrm{km/h}$

Čas na celou cestu: $t=\frac{s}{v_p}=\frac{16}{20}\mathrm{h}=0{,}8\,\mathrm{h}=48\,\mathrm{min}$

Odpověď:
Pavel ujel celou trasu za 48 minut.

Sbírka C - Př. 1.1.5.3

Zadání:
Auto ujelo vzdálenost 120 km. Kdyby zvýšilo svou průměrnou rychlost o $10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, doba jeho cesty by byla o 24 minut kratší. Jak dlouho auto skutečně jelo?

Výpis známých veličin:
$s=120\,\mathrm{km}$ $\qquad v=?$ $\qquad t=?$

Fyzikální rozbor situace:
Opět jde o rovnoměrný pohyb. Vyjdeme ze vztahu pro rychlosti skutečného a rychlejšího pohybu. $v+10=v_r$.

Řešení:

$v+10=v_r$ vyjádříme rychlosti pomocí dráhy a času

$$\frac{s}{t}+10=\frac{s_r}{t_r}$$

Platí: $s=s_r$ (dráha auta je v obou případech stejná) a $t_r=t-\frac{24}{60}=t-0{,}4$ (doba cesty při vyšší rychlosti by byla o 24 minut kratší – čas musíme převést na hodiny)

Dosadíme $\frac{s}{t}+10=\frac{s}{t-0{,}4}$

Délku trasy známe, v rovnici zbývá poslední neznámá, kterou můžeme vypočítat.

$$\frac{120}{t}+10=\frac{120}{t-0{,}4} \quad /\cdot t\left(t-0{,}4\right)$$

$$120\left(t-0{,}4\right)+10t\left(t-0{,}4\right)=120t$$

$$120t-48+10t^2-4t=120t$$

$10t^2-4t-48=0$
$5t^2-2t-24=0$

Najdeme kořeny kvadratické rovnice: $t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 5(-24)}}{2\cdot 5}=\frac{2\pm 22}{10}$

$t_1=\frac{24}{10}\,\mathrm{h}=2,4\,\mathrm{h}=2\,\mathrm{h}\,24\,\mathrm{min}$

$t_2=-\frac{20}{10}=-2\,\mathrm{h}$ - nemá fyzikální význam

Odpověď:
Auto ujelo 120 km za 2 hodiny 24 minut.

Sbírka C - Př. 1.1.5.4

Zadání:
Turista chtěl ujít trasu 16 km za určitý čas. Vyšel proto potřebnou stálou rychlostí. Po 4 km chůze se však neplánovaně zastavil na 20 minut u jezírka, které ho zlákala ke koupání. aby došel do cíle včas musel pak na zbytku trasy trochu přidat – zvýšil rychlost o $0.5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Jakou rychlostí šel na začátku?

Výpis známých veličin:
$s=16\,\mathrm{km}$ $s_1=4\,\mathrm{km}$ $t_2=20\,\mathrm{min}=\frac{1}{3}\,\mathrm{h}$ $v=?$

Fyzikální rozbor situace:
Všechny pohyby budeme považovat za rovnoměrné. Vyjdeme z rovnosti plánovaného a skutečně potřebného času na projití trasy.

Řešení:
$t_p=t_s$

Dosadíme: $t_p=\frac{s}{v}$ (turista chtěl projít trasu rovnoměrně stálou rychlostí) a $t_s=t_1+t_2+t_3$ (čas, který strávil turista na výletě se skládal ze tří částí – ujití prvních 4 km, koupání u jezírka a dojití zbytku trasy).

$\frac{s}{v}=t_1+t_2+t_3$

Dosadíme: $t_1=\frac{s_1}{v}$ (první 4 km šel turista plánovanou rychlostí), $t_2=\frac{1}{3}$ (u jezírka se koupal 20 minut), $t_3=\frac{s-s_1}{v+0,5}$ (zbytek trasy šel rychlostí o 0,5 km/h vyšší než počáteční úsek)

$\frac{s}{v}=\frac{s_1}{v}+\frac{1}{3}+\frac{s-s_1}{v+0,5}$ dosadíme a vypočteme rychlost

$\frac{16}{v}=\frac{4}{v}+\frac{1}{3}+\frac{16-4}{v+0,5}$ $/\cdot 3v(v+0,5)$

$16\cdot 3(v+0,5)=4\cdot 3(v+0,5)+v(v+0,5)+12\cdot 3v$

$$48v + 24 = 12v + 6 + v^2 + 0,5v + 36v$$
$$v^2 + 0,5v - 18 = 0$$
$$2v^2 + v - 36 = 0$$

Najdeme kořeny kvadratické rovnice: $v_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-1 \pm 17}{4}$

$$v_1 = \frac{16}{4} = 4\,\text{km/h}$$

$v_2 = -\dfrac{18}{4} = -4,5\,\text{km/h}$ - záporná rychlost nemá v tomto případě fyzikální význam

Odpověď:
Turista chtěl jít rychlostí 4 km/h.

Sbírka C - Př. 1.1.5.5

Zadání:
Z opačných konců trasy dlouhé 336 km vyjela současně dvě osobní auta. Setkala se po 2 hodinách a 24 minutách jízdy. Kdyby jedno auto vyjelo o 42 minut dříve než auto druhé, setkala by se auta uprostřed celé trasy. Vypočítejte rychlosti obou aut za předpokladu, že byly stálé.

Výpis známých veličin:
$s = 336\,\text{km}$ $\quad t = 2\,\text{h}\,24\,\text{min} = 2,4\,\text{h}$ $\quad v_1 = ?$ $\quad v_2 = ?$

Fyzikální rozbor situace:
Musíme určit rychlosti obou aut, tedy dvě neznámé. Sestavíme pomocí těchto neznámých rovnice popisující fakta ze zadání.

Řešení:
Auta vyjedou z opačných konců trasy a setkají se po 2,4 hodiny. Znamená to, že za tuto dobu dohromady urazí celou trasu.

$$s = s_1 + s_2 = v_1 t + v_2 t$$

Po dosazení číselných hodnot: $336 = 2,4v_1 + 2,4v_2$

Kdyby jedno auto vyjelo o 42 minut dříve než auto druhé, setkala by se auta uprostřed celé trasy. Pomalejší auto ujede 168 km za dobu o 42 minut (0,7 hodin) delší než rychlejší auto.

$$t_{1p} = t_{2p} + 0,7$$
$$\frac{s_p}{v_1} = \frac{s_p}{v_2} + 0,7$$
$$\frac{168}{v_1} = \frac{168}{v_2} + 0,7$$

Máme soustavu dvou rovnic z první rovnice vyjádříme jednu z rychlostí a dosadíme do druhé.

$$336 = 2,4v_1 + 2,4v_2$$
$$2,4v_1 = 336 - 2,4v_2$$

$v_1 = 140 - v_2$

$\dfrac{168}{140 - v_2} = \dfrac{168}{v_2} + 0,7 \quad / \cdot v_2 \left(140 - v_2\right)$

$168 v_2 = 168 \cdot \left(140 - v_2\right) + 0,7 v_2 \left(140 - v_2\right)$

$168 v_2 = 23520 - 168 v_2 + 98 v_2 - 0,7 v^2$

$0,7 v^2 + 238 v_2 - 23520 = 0$

Najdeme kořeny kvadratické rovnice: $v_{1,2} = \dfrac{-238 \pm \sqrt{238^2 - 4 \cdot 0,7 \cdot \left(-23520\right)}}{2 \cdot 0,7} = \dfrac{-238 \pm 350}{1,4}$

$v_{21} = \dfrac{112}{1,4} = 80\,\text{km/h}$

$v_{22} = -\dfrac{588}{1,4} = -420\,\text{km/h}$ - záporná rychlost nemá v tomto případě fyzikální význam

$v_1 = 140 - v_2 = 140 - 80\,\text{km/h} = 60\,\text{km/h}$

Odpověď:
Auta jela rychlostí 60 km/h a 80 km/h.

Sbírka C - Př. 1.1.5.6

Zadání:
Z města M do města N vyjel v 6 hodin ráno cyklista. Po 20 minutách se za ním vydal stejnou rychlostí druhý cyklista. Chodec, který šel z N do M, vykročil v 6.40 h. Po 9 minutách potkal prvního cyklistu a 18 minut na to druhého cyklistu. Vzdálenost obou měst je 30 km. Určete stálé rychlosti cyklistů a chodce.

Výpis známých veličin:
$s = 30\,\text{km} \qquad v_c = ? \qquad v_{ch} = ?$

Fyzikální rozbor situace:
Z údajů v zadání můžeme zjistit doby, po které se cyklisté i chodec pohybovali před setkáními. Při každém platí, že cyklista s chodcem ve chvíli setkání urazili právě 30 km.

Řešení:
Setkání chodce s prvním cyklistou. Cyklista se pohybuje 49 minut (40 minut než vyjde chodec a pak 9 minut než jej potkal), chodec 9 minut, dohromady ušli 30 km.

$v_c \cdot \dfrac{49}{60} + v_{ch} \dfrac{9}{60} = 30$

Setkání chodce s druhým cyklistou. Cyklista se pohybuje 47 minut (20 minut než vyjde chodec a pak 27 minut než jej potkal), chodec 27 minut, dohromady ušli 30 km.

$v_c \cdot \dfrac{47}{60} + v_{ch} \dfrac{27}{60} = 30$

Vyřešíme soustavu rovnic:

$49 v_c + 9 v_{ch} = 1800$

$47 v_c + 27 v_{ch} = 1800$

Z první rovnice dosadíme do druhé: $v_{ch} = \frac{1800 - 49v_c}{9} = 200 - \frac{49}{9}v_c$

$$47v_c + 27\left(200 - \frac{49}{9}v_c\right) = 1800$$

$$47v_c + 5400 - 147v_c = 1800$$

$$100v_c = 3600$$

$$v_c = 36\,\text{km/h}$$

Dopočteme rychlost chodce:

$$v_{ch} = 200 - \frac{49}{9}v_c = 200 - \frac{49}{9}36\,\text{km/h} = 200 - 196\,\text{km/h} = 4\,\text{km/h}$$

Odpověď:
Cyklisté jeli rychlostí 36 km/h, chodec šel rychlostí 4 km/h.

Sbírka C - Př. 1.1.5.7

Zadání:
Kvůli poruše na semaforu ztratil vlak na trati za Brnem 16 minut stáním. Toto zpoždění „zlikvidoval“ tak, že po rozjezdu jel úsek dlouhý 80 km rychlostí o $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ větší. než měl v plánu. Jaká rychlost to byla a jaká měla být?

Výpis známých veličin:
$s = 80\,\text{km}$ $\quad v = ?$

Fyzikální rozbor situace:
Vlak se pohybuje rovnoměrně. Rovnicí zapíšeme vztah mezi plánovaným časem a časem, kterým vlak projel, trasu 80 km.

Řešení:
Plánovaný čas byl o 16 minut delší než čas, za který vlak trasu opravdu projel (aby vlak dojel ztrátu).

$$t_p = t_s + \frac{16}{60}$$

Dosadíme za oba časy: $t_p = \frac{80}{v_p}$, $t_s = \frac{80}{v_s}$.

$$\frac{80}{v_p} = \frac{80}{v_s} + \frac{4}{15}$$

Dosadíme $v_s = v_p + 10$ (vlak je o 10 km/h rychleji než plánoval)

$$\frac{80}{v_p} = \frac{80}{v_p + 10} + \frac{4}{15}$$

V rovnici je jediná neznámá, jejím vyřešením zjistím plánovanou rychlost vlaku.

$$\frac{80}{v_p} = \frac{80}{v_p + 10} + \frac{4}{15} \quad / \cdot \frac{15v_p\left(v_p + 10\right)}{4}$$

$$300\left(v_p+10\right)=300v_p+v_p\left(v_p+10\right)$$
$$300v_p+3000=300v_p+v_p^2+10v_p$$
$$v_p^2+10v_p-3000=0$$

Najdeme kořeny kvadratické rovnice: $v_{p1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot(-3000)}}{2}=\dfrac{-10\pm110}{2}$

$$v_{p1}=\frac{100}{2}=50\,\text{km/h}$$

$v_{p2}=-\dfrac{120}{2}=-60\,\text{km/h}$ - záporná rychlost nemá v tomto případě fyzikální význam

Vypočteme skutečnou rychlost $v_s=v_p+10=50+10\,\text{km/h}=60\,\text{km/h}$

Odpověď:
Vlak měl jet rychlostí 50 km/h, ale jel rychlostí 60 km/h.

Sbírka C - Př. 1.1.5.8

Zadání:
Cesta z A do B dlouhá 11,5 km nejdříve stoupá vzhůru, pak chvíli vede po rovině a nakonec klesá dolů. Chodec ušel celou cestu z A do B za 2 hodiny a 54 minut, cestu zpět za 3 hodiny a 6 minut. V obou směrech šel do kopce stálou rychlostí $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ po rovině $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a z kopce rychlostí $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Vypočti délku stoupání a délku klesání na cestě z A do B.

Výpis známých veličin:
$v_n=3\,\text{km/h}$ $v_r=4\,\text{km/h}$ $v_d=5\,\text{km/h}$ $s=11,5\,\text{km}$ $t_{AB}=2\text{h}\,54\,\text{min}=2,9\,\text{h}$
$t_{AB}=3\text{h}\,6\,\text{min}=3,1\,\text{h}$ $s_n=?$ $s_d=?$

Fyzikální rozbor situace:
Doba, kterou půjde chodec z A do B je součtem dob, po které jde do kopce, pak po rovině, a nakonec z kopce. Rychlosti ve všech těchto úsecích známe. Podobně můžeme napsat rovnici pro cestu zpět.

Obecné řešení:
Cesta z A do B
$$t_{AB}=t_n+t_r+t_d$$
$t_{AB}=\dfrac{s_n}{v_n}+\dfrac{s_r}{v_r}+\dfrac{s_d}{v_d}$ Délku rovného úseku můžeme určit pomocí délky celé cesty $s_r=s-s_n-s_d$
a dosadíme do rovnice hodnoty:
$$t_{AB}=\frac{s_n}{v_n}+\frac{s-s_n-s_d}{v_r}+\frac{s_d}{v_d}$$
$$2,9=\frac{s_n}{3}+\frac{11,5-s_n-s_d}{4}+\frac{s_d}{5}$$

Cesta z B do A
$$t_{BA}=t_n+t_r+t_d$$

$t_{AB} = \frac{s_d}{v_n} + \frac{s_r}{v_r} + \frac{s_n}{v_d}$ (Úseky procházíme v obráceném pořadí)

Délku rovného úseku určíme pomocí délky celé cesty $s_r = s - s_n - s_d$ a dosadíme do rovnice hodnoty:

$$t_{BA} = \frac{s_d}{v_n} + \frac{s - s_n - s_d}{v_r} + \frac{s_n}{v_d}$$

$$3,1 = \frac{s_d}{3} + \frac{11,5 - s_n - s_d}{4} + \frac{s_n}{5}$$

Teď řešíme soustavu rovnic:

$$2,9 = \frac{s_n}{3} + \frac{11,5 - s_n - s_d}{4} + \frac{s_d}{5} \quad / \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$3,1 = \frac{s_d}{3} + \frac{11,5 - s_n - s_d}{4} + \frac{s_n}{5} \quad / \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$174 = 20s_n + 15(11,5 - s_n - s_d) + 12s_d$$

$$186 = 20s_d + 15(11,5 - s_n - s_d) + 12s_n$$

$$174 = 20s_n + 172,5 - 15s_n - 15s_d + 12s_d$$

$$186 = 20s_d + 172,5 - 15s_n - 15s_d + 12s_n$$

$$1,5 = -3s_d + 5s_n \quad / \cdot 5$$

$$13,5 = 5s_d - 3s_n \quad / \cdot 3$$

$$7,5 = -15s_d + 25s_n$$

$$40,5 = 15s_d - 9s_n$$

$$48 = 16s_n$$

$$s_n = 3\,\text{km}$$

Dopočteme úsek směřující dolů:

$$7,5 = -15s_d + 25s_n$$

$$15s_d = 25s_n - 7,5 = 25 \cdot 3 - 7,5 = 67,5$$

$$s_d = 4,5\,\text{km}$$

Odpověď:

Stoupání na cestě z A do B má délku 3 km, klesání pak délku 4,5 km.