

2.3.5 Stavová rovnice ideálního plynu

Předpoklady: 2301, 2303, 2304

Plyn nafoukaný do balónku se po čase dostane do rovnovážného stavu.

Jeho stav určují stavové veličiny: p, T, V, n, ρ, m .

Jaký je mezi nimi vztah?

$$\text{Rovnice pro tlak: } p = \frac{1}{3} N_v m_0 v_k^2$$

$$\text{Dosadíme: } N_v = \frac{N}{V}, v_k^2 = \frac{3kT}{m_0}$$

$$p = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \cdot m_0 \cdot \frac{3kT}{m_0}$$

$$p = \frac{kNT}{V}$$

- $pV = kNT$ - 1. verze stavové rovnice ideálního plynu (přes počet molekul)

Rozepíšeme si $N = n \cdot N_A$ (molární množství, Avogadrova konstanta)

$$pV = nN_A kT$$

Označíme: $N_A k = R$ (molární plynová konstanta $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$).

- $pV = nRT$ - 2. verze stavové rovnice ideálního plynu (přes molární množství)

Rozepíšeme si: $n = \frac{m}{M}$

- $pV = \frac{m}{M} RT$ - 3. verze stavové rovnice ideálního plynu (přes molární hmotnost)

Vrátíme se k 2. verzi stavové rovnice:

$$pV = nRT \quad / : T$$

$$\frac{pV}{T} = nR$$

Pokud se nemění množství plynu, je pravá strana stále stejná \Rightarrow musí být stejná i levá strana

$$\Rightarrow \frac{pV}{T} = \text{konst.}$$

Při stavové změně ideálního plynu o stálém molárním množství se výraz $\frac{pV}{T}$ nemění. Pro dva různé stavy takového plynu platí: $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ (stavová rovnice plynu o stálé hmotnosti).

Př. 1: Urči molární množství a počet molekul vodíku H_2 obsaženého v pouťovém balóнку o objemu $V = 41$ při teplotě $t = 30^\circ\text{C}$ a tlaku $p = 130\text{ kPa}$.

Zjišťujeme molární množství \Rightarrow použijeme druhou verzi stavové rovnice: $pV = nRT$.

$V = 41 = 0,004\text{ m}^3$, $t = 30^\circ\text{C} = 303,15\text{ K}$, $p = 130\text{ kPa} = 130000\text{ Pa}$, $n = ?$, $N = ?$

$$pV = nRT$$

$$\frac{pV}{RT} = n$$

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{130000 \cdot 0,004}{8,31 \cdot 303,15} \text{ mol} = 0,206 \text{ mol}$$

$$N = n \cdot N_A = 0,206 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 1,24 \cdot 10^{23}$$

Pouťový balónek obsahuje za daných podmínek 0,206 molu vodíku, což představuje $1,24 \cdot 10^{23}$ částic.

Př. 2: Jak se změní objem balóнку, když vystoupá do výšky 2000 m, kde je teplota 10°C a kvůli poklesu okolního tlaku se sníží i tlak v balóнку na 100 kPa.

Porovnáváme dva stavy téhož plynu \Rightarrow použijeme $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$.

$V_1 = 41 = 0,004\text{ m}^3$, $t_1 = 30^\circ\text{C} = 303,15\text{ K}$, $p_1 = 130\text{ kPa} = 130000\text{ Pa}$, $t_2 = 10^\circ\text{C} = 283,15\text{ K}$,

$p_2 = 100\text{ kPa} = 100000\text{ Pa}$, $V_2 = ?$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{p_1 V_1 T_2}{p_2 T_1} = V_2$$

$$V_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{130000 \cdot 0,004 \cdot 283,15}{100000 \cdot 303,15} \text{ m}^3 = 4,86 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 4,86\text{ l}$$

Objem balóнку se zvětší na 4,86 l.

Př. 3: Teplota 1,5 kg metanu v uzavřené tlakové lahvi je 300°C . Urči jaký je jeho tlak pokud je objem lahve 50 l.

Použijeme 3. verzi stavové rovnice (obsahuje hmotnost, která je zadána): $pV = \frac{m}{M} RT$.

$V = 50\text{ l} = 0,05\text{ m}^3$, $t = 300^\circ\text{C} = 573,15\text{ K}$, $m = 1,5\text{ kg}$, $p = ?$

Potřebujeme molární hmotnost metanu CH_4 :

$$M(CH_4) = M(C) + 4 \cdot M(H) = 12 + 4 \cdot 1\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 16\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 0,016\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$p = \frac{mRT}{MV} = \frac{1,5 \cdot 8,31 \cdot 573,15}{0,016 \cdot 0,05} \text{ Pa} = 8930000 \text{ Pa} = 8,9\text{ MPa}$$

Metan v lahvi má tlak 8,9 MPa.

Poznámka: Předchozí příklad je značně umělý. Ve skutečnosti se plyny (například propan-butan) v tlakových lahvích vyskytují v kapalném stavu. Například nejmenší propan-butanová láhev obsahuje 2 kg kapalného plynu o hustotě kolem $500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Její vnitřní objem je tedy kolem 4 l. Jak je možné, že je v lahvi propan-butan kapalný i při teplotě 20°C si vysvětlíme později.

Př. 4: Urči objem jednoho molu plynu za normálních podmínek (molární objem).

Použijeme 1. verzi stavové rovnice (obsahuje zadaný počet částic): $pV = kNT$.

$t = 0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$, $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $N = 6,023 \cdot 10^{23}$, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $V = ?$

$$pV = kNT$$

$$V = \frac{kNT}{p} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 6,023 \cdot 10^{23} \cdot 273,15}{1,013 \cdot 10^5} \text{ m}^3 = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 22,4 \text{ l}$$

Molární objem plynu za normálních podmínek je 22,4 litru.

Př. 5: 35 litrů vzduchu v pneumatice osobního automobilu se při jízdě zahřeje na teplotu 60°C . Tlak v pneumatice během jízdy se rovná $250\,000 \text{ Pa}$. Urči, jaký objem vzduchu o teplotě 20°C a tlaku $100\,000 \text{ Pa}$ je nutné do pneumatiky nahustit.

Porovnáváme dva stavy téhož plynu \Rightarrow použijeme $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$.

$t_1 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$, $p_1 = 100\,000 \text{ Pa}$, $t_2 = 60^\circ\text{C} = 333 \text{ K}$, $p_2 = 250\,000 \text{ Pa}$, $V_2 = 35 \text{ l}$, $V_1 = ?$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$V_1 = \frac{p_2 V_2 T_1}{p_1 T_2}$$

$$V_1 = \frac{p_2 V_2 T_1}{p_1 T_2} = \frac{250\,000 \cdot 0,035 \cdot 293}{100\,000 \cdot 333} \text{ l} = 77 \text{ l}$$

V pneumatice je nahuštěno 77 litrů vzduchu o teplotě 20°C a tlaku $100\,000 \text{ Pa}$.

Př. 6: Vzduch v ucpané stříkačce stlačíme na jednu pětinu původního objemu. Během stlačování se teplota plynu zvýší o 10°C . Urči tlak vzduchu, pokud měl na začátku stlačování teplotu 20°C a tlak $100\,000 \text{ Pa}$.

Porovnáváme dva stavy téhož plynu \Rightarrow použijeme $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$.

$t_1 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$, $p_1 = 100\,000 \text{ Pa}$, $t_2 = 30^\circ\text{C} = 303 \text{ K}$, $V_2 = \frac{V_1}{5}$, $p_2 = ?$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{p_1 V_1 T_2}{V_2 T_1} = p_2$$

$$p_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{V_2 T_1} = \frac{100000 \cdot V_1 \cdot 303}{\frac{V_1}{5} \cdot 293} = \frac{100000 \cdot 303 \cdot 5}{293} \text{ Pa} = 517000 \text{ Pa}$$

V pneumatice je nahuštěno 33 litrů vzduchu o teplotě 20°C a tlaku 100000 Pa .

Př. 7: Při nafukování kola je třeba stlačit pumpičku o objemu pístu 0,1 litru celkem šedesátkrát. Do pístu pumpičky se nasává vzduch o tlaku 100000 Pa a teplotě 20°C . Urči, jaká část vzduchu unikne mimo duši kola, pokud nafouknutá duše má objem 2,3, tlak 1,8 atm a vzduch má ihned po napumpování teplotu 25°C .

Určíme molární množství:

- vzduchu nasátého do pumpičky,
- vzduchu v duši po napumpování.

Porovnáním získáme množství uniklého vzduchu.

Množství vzduchu nasátého do pumpičky:

$$V = 60 \cdot 0,11 = 6,6 \text{ l} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \quad p = 100000 \text{ Pa}, \quad t = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}, \quad n = ?$$

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT} = \frac{100000 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 293} \text{ mol} = 0,25 \text{ mol}$$

Množství vzduchu v napumpované duši:

$$V = 2,31 = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \quad p = 180000 \text{ Pa}, \quad t = 25^\circ\text{C} = 298 \text{ K}, \quad n = ?$$

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT} = \frac{180000 \cdot 2,3 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 298} \text{ mol} = 0,17 \text{ mol}$$

Porovnání:

$$0,25 \text{ mol} \quad \dots \quad 100\%$$

$$0,17 \text{ mol} \quad \dots \quad x\%$$

$$\frac{x}{0,17} = \frac{100}{0,25} \Rightarrow x = \frac{0,17}{0,25} \cdot 100\% = 68\%$$

Během pumpování unikla mimo duši přibližně třetina vzduchu nasátého do pumpičky.

Dodatek: Rozhodně není pravda, že veškerý vzduch, který se nedostal do duše unikl. Část vzduchu zůstává uvnitř šlaufku mezi koncem pístu a ventilkem. Vzduch začíná proudit do duše teprve v okamžiku, kdy je tlak ve šlaufku větší než v duši. Je tedy zřejmé, že v rostoucím tlakem se množství vzduchu, který napumpujeme do duše zmenšuje. Kvůli skutečnosti uvedené v předchozí větě existuje maximální tlak, na který můžeme duši napumpovat (jeho určení je pak docela zajímavým námětem na samostatnou práci).

Shrnutí: Stavové veličiny plynu jsou svázány stavovou rovnicí. Pro stálé množství

ideálního plynu platí $\frac{pV}{T} = \text{konstanta}$.