2.3.2 Střední kvadratická rychlost

Předpoklady: 2301

Rozdělení rychlostí molekul obsahuje příliš mnoho informací $\Rightarrow$ snaha najít jediné číslo nejlépe charakterizující rychlost $\Rightarrow$

- nejpravděpodobnější rychlost v_p (rychlost odpovídající vrcholu grafu)
- průměrná rychlost $\overline{v}$

Problém: pro vlastnosti plynu je nejdůležitější kinetická energie, ta podle vzorce $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ závisí na druhé mocnině rychlosti $\Rightarrow$ když spočítáme energii z v_p nebo $\overline{v}$ získáme špatnou hodnotu E_k

Př. 1: Plyn je tvořen třemi molekulami o rychlostech $v_1 = 200\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 300\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $v_3 = 400\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Urči:
a) průměrnou rychlost molekul
b) celkovou kinetickou energii plynu
c) celkovou kinetickou energii plynu tvořeného třemi molekulami, které se pohybují stejnou průměrnou rychlostí určenou v bodě a)
d) takovou rychlost, aby celková kinetická energie plynu tvořeného třemi molekulami s touto rychlostí byla stejná jako je energie určená v bodě b)

a) průměrnou rychlost molekul

$$\overline{v} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} = \frac{200 + 300 + 400}{3}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 300\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

b) celkovou kinetickou energii plynu

$$E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) = \frac{1}{2}m\left(200^2 + 300^2 + 400^2\right) = 145000m$$

c) celkovou kinetickou energii plynu tvořeného třemi molekulami, které se pohybují stejnou průměrnou rychlostí určenou v bodě a)

$$E_k = 3\frac{1}{2}m\overline{v}^2 = 3\frac{1}{2}m \cdot 300^2 = 135000m$$

d) takovou rychlost, aby celková kinetická energie plynu tvořeného třemi molekulami s touto rychlostí byla stejná jako je energie určená v bodě b)

$$E_k = 3\frac{1}{2}mw^2 \Rightarrow w = \sqrt{\frac{2E_k}{3m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 145000m}{3m}}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 311\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Potvrdily se naše obavy:

- hodnota kinetické energie určená pomocí průměrné rychlosti je menší než skutečnost
- správnou hodnotu kinetické energie bychom získali pomocí rychlosti, která je vyšší než rychlost průměrná

Př. 2: Navrhni postup, jak v předchozím příkladu určit „průměrnou rychlost pro výpočet kinetické energie“ přímo ze zadaných hodnot rychlostí.

Celková kinetická energie pomocí molekul: $E_k = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)$

Celková kinetická energie pomocí „průměrné rychlosti“: $E_k = 3 \cdot \frac{1}{2}mw^2$

Obě hodnoty se rovnají: $3 \cdot \frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)$

$3w^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$

$w = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{3}}$ - odmocnina z průměru z druhých mocnin

Určujeme odmocninu z průměru z druhých mocnin (kvadrátů) rychlostí $\Rightarrow$ mluvíme o **střední kvadratické rychlosti** v_k

$$v_k^2 = \frac{\Delta N_1 v_1^2 + \Delta N_2 v_2^2 + \ldots \Delta N_n v_n^2}{N}$$

Př. 3: Urči střední kvadratickou rychlost pro plynu z příkladu 1.

$$w = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{3}} = \sqrt{\frac{200^2 + 300^2 + 400^2}{3}}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 311\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Dodatek: Příčina toho, proč je střední kvadratická rychlost větší než rychlost průměrná, tkví ve stále rostoucí strmosti kvadratické funkce. Započítáme-li do průměru dvakrát větší rychlost, do průměru druhých mocnin přidáváme hodnotu čtyřikrát větší. Větší hodnoty tak zvětšují průměr druhých mocnin více než běžný průměr.

Př. 4: Urči střední kvadratickou rychlost plynu, který tvoří 15 molekul plynu s rychlostmi v intervalu $\left\langle 200\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}; 300\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \right\rangle$ a 20 molekul plynu s rychlostmi v intervalu $\left\langle 300\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}; 400\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \right\rangle$.

Problém: neznáme přesné rychlosti molekul, víme jen, že patří do určitého v intervalu $\Rightarrow$ budeme počítat jakoby všechny molekuly v intervalu $\left\langle 200\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}; 300\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \right\rangle$ měly rychlost $250\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (molekuly v intervalu $\left\langle 300\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}; 400\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \right\rangle$ rychlost $350\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

Dosazujeme rovnou čísla: $v_k = \sqrt{\frac{15 \cdot 250^2 + 20 \cdot 350^2}{35}} = 311\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Uvedený plyn má střední kvadratickou rychlost $311\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Př. 5: Urči z údajů v tabulce střední kvadratickou rychlost molekul kyslíku O_2 při teplotě $0\,°\mathrm{C}$.

$v; v + \Delta v$ $[\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$	$0 - 100$	$100 - 200$	$200 - 300$	$300 - 400$	$400 - 500$

$\frac{\Delta N}{N}$	$0,014$	$0,081$	$0,165$	$0,214$	$0,206$
$v; v+\Delta v\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	$500-600$	$600-700$	$700-800$	$800-900$	nad 900
$\frac{\Delta N}{N}$	$0,151$	$0,092$	$0,048$	$0,020$	$0,009$

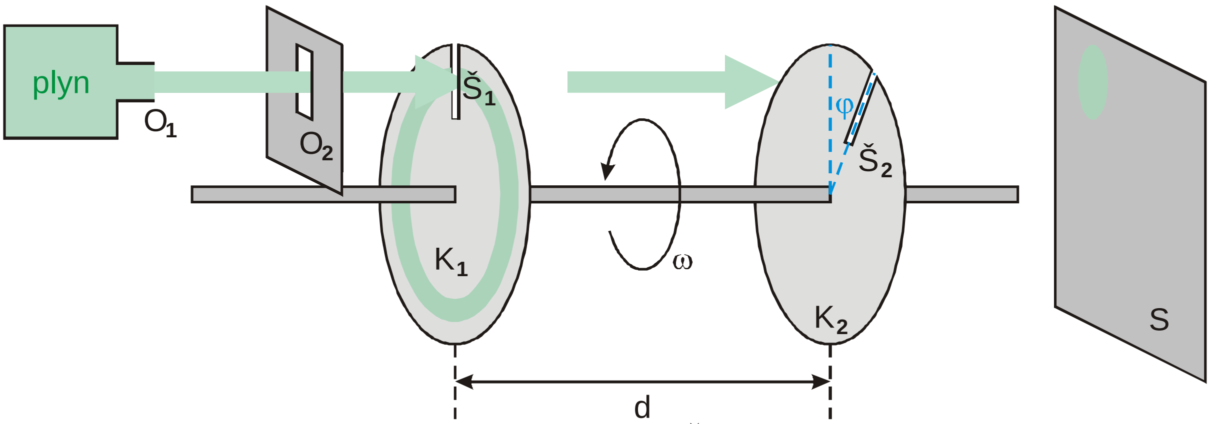
Stejný výpočet jako v předchozím příkladě, ale dosazujeme více čísel:

$$v_k = \sqrt{\frac{0,014\cdot 50^2 + 0,081\cdot 150^2 + 0,165\cdot 250^2 + \ldots + 0,020\cdot 850^2 + 0,009\cdot 1000^2}{1}} = 464\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Střední kvadratická rychlost molekul kyslíku O_2 při teplotě $0°\mathrm{C}$ je $464\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad sebou nese jeden technický problém. Výraz, který by studenti měli zadat do kalkulačky, je pro většinu běžných přístrojů příliš dlouhý. Snažím se, aby studenti spíše než papír využili paměť kalkulaček.

Př. 6: Na obrázku je nakresleno schéma Lammertova pokusu. Z násobky vylétají molekuly plynu (v originálním pokusu páry rtuti), po průletu aparaturou z nich zbude pouze paprsek molekul, které mají stejnou rychlost. Vysvětli, jak pokus funguje. Spočti rychlost molekul, které proletí celým přístrojem od nádobky s plynem až ke stínítku.



Molekuly plynu vylétají různou rychlostí z nádobky. Část molekul, která projde dvojicí otvorů O_1 a O_2, tvoří úzký rovnoběžný paprsek. Většina molekul z tohoto paprsku se zastaví o kotouč K_1. Molekuly, které se trefí do štěrbiny $\check{\mathrm{S}}_1$, projdou za kotouč a letí k druhému kotouči K_2. Ke stínítku se dostanou pouze v případě, že mají takovou rychlost, aby dorazily ke druhému kotouči právě ve chvíli, kdy bude štěrbina $\check{\mathrm{S}}_2$ ve svislé poloze a umožní jim projít až ke stínítku.

Pro molekuly se správnou rychlostí platí: čas potřebný k uražení vzdálenosti *d* mezi kotouči je stejný jako čas, potřebný k tomu, aby se druhý kotouč otočil o úhel φ, který mezi sebou svírají štěrbiny.

Předpokládáme rovnoměrný pohyb letících molekul $\Rightarrow$ $d = vt \Rightarrow t = \frac{d}{v}$

Předpokládáme rovnoměrné otáčení kotoučů $\Rightarrow$ $\varphi = \omega t \Rightarrow t = \frac{\varphi}{\omega}$

Pokud molekuly proletí i druhou štěrbinou časy se musí rovnat: $\frac{d}{v} = \frac{\varphi}{\omega}$ $\Rightarrow$

Na stínítko dopadnou molekuly s rychlostí $v = \frac{d\omega}{\varphi}$ $\Rightarrow$ změnou těchto tří parametrů můžeme vybírat různé rychlosti a na stínítku měřit kolik molekul dopadlo na stínítko.

Shrnutí: Protože pro naše úvahy je důležitá kinetická energie plynu, budeme rychlost molekul charakterizovat pomocí odmocniny z průměru z druhých mocnin rychlostí, tedy střední kvadratickou rychlostí.