1.6.1 Newtonův gravitační zákon

Předpoklady: 1201, 1203

Od pradávna: Proč padají předměty dolů?
Nejčastější řešení: předměty mají přirozené místo, kterého se snaží dosáhnout.

17. století:

- Zákon setrvačnosti $\Rightarrow$ padání předmětů způsobuje síla $\Rightarrow$ kdo touto silou působí?
- Heliocentrická soustava $\Rightarrow$ planety obíhají kolem Slunce $\Rightarrow$ jaká síla drží planety na oběžné dráze kolem Slunce, jak drží Země Měsíc?

I. Newton (během odpočinku pod jabloní na něj spadlo jablko): Padání předmětů na zem i obíhání planet způsobuje stejná síla (univerzálnost síly byla v tehdejší době možná nejodvážnějším nápadem).

Př. 1: Najdi co nejvíce vlastností, které musí splňovat síla způsobující přitahování planet i věcí ke středu Země.

- Roste s hmotností přitahovaného tělesa (přímo úměrně kvůli vzorci $F_g = mg$).
- Roste s hmotností přitahujícího tělesa (Země nás přitahuje víc než soused v lavici).
- Velikost síly klesá se vzdáleností (jinak by předměty na Zemi padaly ke Slunci, které je těžší než Země).
- Síla je přitažlivá, těleso přitahuje ostatní tělesa ke svému středu (plní roli dostředivé síly, táhne předměty do středu Země).
- Působení obou těles je vzájemné (3. Newtonův zákon).

Pedagogická poznámka: Rozbor podmínek, které musí síla splňovat ještě před uvedením vzorce je důležitý. Jde o to, aby si studenti uvědomili, že předchozí zákony poměrně přesně určují mnoho podmínek, které musí splňovat zákony, které ještě neznáme.

Každá dvě tělesa se navzájem přitahují stejně velkými gravitačními silami.

Velikost gravitační síly, kterou se přitahují dva hmotné body, je určena vztahem $F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$, kde m_1, m_2 jsou hmotnosti obou těles, r je jejich vzdálenost a $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ je gravitační konstanta.

- Vztah pro velikost gravitační síly platí přesně i pro dvě stejnorodá tělesa kulového tvaru. r je pak vzdálenost jejich středů.
- Pro ostatní tělesa platí vztah pouze přibližně s mírou přesnosti, která odpovídá přesnosti, se kterou můžeme tělesa považovat za hmotné body nebo stejnorodá tělesa kulového tvaru.
- Hodnota gravitační konstanty je velmi malá $\Rightarrow$ přesněji změřena byla až téměř po sto letech od objevu gravitačního zákona. Newton její hodnotu pouze odhadl (s chybou přibližně 15%).

Pedagogická poznámka: Následující opakování je sice čistě matematické, ale bohužel často nutné. Nácvik zadávání čísel v exponenciálním tvaru je pak nutný vždy, jen málokterý student význam potřebných tlačítek zná. Pokud následující příklady přeskočíte, neušetříte žádný čas neušetříte, protože studenti budou mít obrovské problémy při zadávání výpočtů do kalkulaček.

Opakování:

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$ $\quad$ $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{1000} = 0,001$

Mocniny deseti používáme k přehlednějšímu zápisu velmi malých nebo velmi velkých čísel: $1,2 \cdot 10^7 = 1,2 \cdot 10000000 = 12000000$.

Na kalkulačkách mají exponenciální zápisy i vlastní tlačítko EXP (E nebo $\times 10^x$). Zadávání čísla $1,2 \cdot 10^7$ pak provádíme takto: $1,2\,\mathrm{EXP}\,7 =$.

Př. 2: Převeď z exponenciálního tvaru. Výsledek ověř zadáním na kalkulačce.

a) $2 \cdot 10^5$ b) $3,1 \cdot 10^{-2}$ c) $3 \cdot 10^3$ d) $7,3 \cdot 10^{-4}$

a) $2 \cdot 10^5 = 2 \cdot 100000 = 200000$ b) $3,1 \cdot 10^{-2} = 3,1 \cdot 0,01 = 0,031$

c) $3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 1000 = 3000$ d) $7,3 \cdot 10^{-4} = 7,3 \cdot 0,0001 = 0,00073$

Př. 3: Vypočti na kalkulačce:

a) $1,2 \cdot 10^3 \cdot 9,5 \cdot 10^{-2}$ b) $\frac{3,5 \cdot 10^{11}}{6,3 \cdot 10^{-22}}$ c) $\frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 2,5 \cdot 10^{10}}{\left(3,56 \cdot 10^{12}\right)^2}$

a) $1,2 \cdot 10^3 \cdot 9,5 \cdot 10^{-2} = 114$ b) $\frac{3,5 \cdot 10^{11}}{6,3 \cdot 10^{-22}} = 5,56 \cdot 10^{32}$ c) $\frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 2,5 \cdot 10^{10}}{\left(3,56 \cdot 10^{12}\right)^2} = 1,18 \cdot 10^9$

Záporné mocniny budeme od tohoto okamžiku používat i k zápisu jednotek $\Rightarrow$ místo m/s **budeme psát** $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$**.**

Př. 4: Urči velikost gravitační síly, kterou přitahuje Slunce Zemi. $m_Z = 5,98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, $m_S = 1,99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$, vzdálenost Země-Slunce $1,5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$.

$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, $m_S = 1,99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$, $m_Z = 5,98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, $F_g = ?$

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{\left(1,5 \cdot 10^{11}\right)^2}\ \mathrm{N} = 3,5 \cdot 10^{22}\ \mathrm{N}$$

Slunce přitahuje Zemi silou $3,5.10^{22}\ \mathrm{N}$.

Př. 5: Urči velikost gravitační síly, kterou přitahuje Země Měsíc. $m_Z = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, $m_M = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg, střední vzdálenost Země-Měsíc 384 000 km.

$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, $m_Z = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, $m_M = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg,
$r = 384000\,\mathrm{km} = 3,84 \cdot 10^5\,\mathrm{km} = 3,84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$, $F = ?$

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{\left(3,84 \cdot 10^8\right)^2}\ \mathrm{N} = 1,99 \cdot 10^{20}\ \mathrm{N}$$

Země přitahuje Měsíc silou $1,99 \cdot 10^{20}$ N.

Př. 6: Urči gravitační sílu, kterou Tě přitahuje při hodině Tvůj učitel, když sedí za katedrou. Je takto spočtený výsledek přesný? Je přesnější pro žáky v předních nebo zadních lavicích? Je přesnější u hubených nebo tlustých učitelů?

$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, $m_1 = 75\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 50\,\mathrm{kg}$, $r = 6\,\mathrm{m}$, $F_g = ?$

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{75 \cdot 50}{6^2}\ \mathrm{N} = 7,0 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{N}$$

Výsledek je nepřený, protože nemůžeme učitele a studenta vzhledem k jejich vzdálenosti považovat za hmotné body.
Přesnější výsledek získáme:

- pro studenty v zadních lavicích (jsou od učitele dále a proto je oprávněnější jejich zanedbání za hmotné body),
- pro tlusté učitele (více připomínají stejnorodé kulové těleso).

Př. 7: Urči gravitační sílu, kterou Země přitahuje kosmonauta o hmotnosti 80 kg na kosmické stanici ISS, která létá ve výšce 350 km nad povrchem Země. Poloměr Země je 6378km. Jak je možné, že se kosmonaut nachází v beztížném stavu?

$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, $m_1 = 80\,\mathrm{kg}$, $m_Z = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6378\,\mathrm{km}$, $d = 350\,\mathrm{km}$,
$F_g = ?$

Celková vzdálenost kosmonauta od středu Země:
$r = 6378 + 350\,\mathrm{km} = 6728\,\mathrm{km} = 6,728 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot 80}{\left(6,728 \cdot 10^6\right)^2}\ \mathrm{N} = 705\,\mathrm{N}$$

Gravitační síla Země je ve výšce 350 km rovna 705 N, je tedy jen o 95 N slabší než na povrchu Země.
Beztížný stav není stav neznamená, že na kosmonauta nepůsobí gravitační síla. Kosmonaut se vznáší v lodi, protože loď stejně jako on obíhá kolem Země a stejně jako na kosmonauta na ní působí gravitační síla, která hraje roli dostředivé síly. Tato dostředivá síla udržuje kosmonauta i loď na stejné oběžné dráze a proto kosmonauta nic netáhne k podlaze.
Stejný efekt nastane, když padáme v letadle volným pádem.

Př. 8: Vypočti z velikosti gravitační síly, kterou Tě přitahuje Země, její hmotnost.

$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, $r = 6\,\mathrm{m}$, $g = 10\,\mathrm{N \cdot kg^{-1}}$, $r = 6378\,\mathrm{km} = 6,378 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$, $m_Z = ?$

Gravitační sílu, kterou nás přitahuje Země, můžeme spočítat dvěma způsoby: $F_g = mg$ a $F_g = \kappa \frac{m \cdot m_Z}{r^2}$. V obou případech musíme získat stejnou hodnotu.

$$mg = \kappa \frac{m \cdot m_Z}{r^2} \quad / : m$$

$$g = \kappa \frac{m_Z}{r^2}$$

$$m_Z = \frac{gr^2}{\kappa} = \frac{10 \cdot \left(6{,}378 \cdot 10^6\right)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \text{ kg} = 6{,}1 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Hmotnost Země je $6{,}1 \cdot 10^{24}$ kg.

Př. 9: Urči velikost gravitačního zrychlení na povrchu Jupiteru ($m_J = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg, $R_J = 7{,}1 \cdot 10^7$ m).

$\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, $m_J = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg, $R_J = 7{,}1 \cdot 10^7$ m, $g = ?$

Stejná úvaha jako v předchozím příkladě.

$$mg_J = \kappa \frac{m \cdot m_J}{R_J^2} \quad / : m$$

$$g_J = \kappa \frac{m_J}{R_J^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{1{,}9 \cdot 10^{27}}{\left(7{,}1 \cdot 10^7\right)^2} \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 25\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Gravitační zrychlení má na povrchu Jupiteru velikost $25\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (cítili bychom se dva a půl krát těžší než na Zemi).

Shrnutí: