

1.5.7 Zákon zachování mechanické energie II

Př. 1: Kulka o hmotnosti 8 g dopadne na dřevo rychlostí 500 m/s a zaryje se do hloubky 8 cm. Urči průměrnou sílu, kterou dřevo brzdilo kulku.

$$E_k = W \quad \frac{1}{2}mv^2 = Fs \quad F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{0,008 \cdot 500^2}{2 \cdot 0,08} \text{ N} = 12500 \text{ N}$$

Dřevo brzdí kulku silou 12500 N.

Př. 2: Jak tlusté dřevo by kulku z předchozího příkladu zpomalilo na rychlost 50 m/s?

$$\Delta E_k = E_{k1} - E_{k2} = W \quad \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = Fs \quad / \cdot 2 \quad mv_1^2 - mv_2^2 = 2Fs$$

$$s = \frac{mv_1^2 - mv_2^2}{2F} = \frac{0,008 \cdot 500^2 - 0,008 \cdot 50^2}{2 \cdot 12500} \text{ m} = 0,079 \text{ m}$$

Na 50 m/s zpomalí kulku 7,9 cm dřeva.

Př. 3: Skokan na lyžích najíždí po doskoku do protisvahu se sklonem 20° počáteční rychlostí 15 m/s. Urči vzdálenost, kterou na protisvahu urazí, než se zastaví. Součinitel tření mezi skluznicemi a sněhem je 0,1.

$$v_1 = 15 \text{ m/s}, \quad \alpha = 20^\circ, \quad f = 0,1, \quad s = ?$$

$$E_{k1} = E_{p2} + W$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgs \sin \alpha + mg \cos \alpha fs \quad \frac{1}{2}v_0^2 = gs \sin \alpha + g \cos \alpha fs$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 = gs(\sin \alpha + f \cos \alpha) \quad \frac{1}{2}v_0^2 = gs(\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{15^2}{2 \cdot 10(\sin 20^\circ + 0,1 \cdot \cos 20^\circ)} \text{ m} = 26 \text{ m}$$

Skokan urazí na protisvahu 26 m.

Dokonale pružný centrální ráz dvou koulí



Situace známá z kulečnicku:

- dokonale pružný: při srážce se neztrácí energie,
- centrální ráz: srazí se dvě stejně velké koule tak, že bod dotyku leží na spojnici těžišť (koule se do sebe trefí).

- Zákon zachování hybnosti (při srážce hraje roli pouze vzájemné působení koulí):

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2.$$

- Zákon zachování energie (ráz je dokonale pružný):

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1w_1^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2.$$

Upravíme si druhou rovnici:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1w_1^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2$$

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1w_1^2 + m_2w_2^2$$

$$m_1v_1^2 - m_1w_1^2 = m_2w_2^2 - m_2v_2^2$$

$$m_1(v_1^2 - w_1^2) = m_2(w_2^2 - v_2^2)$$

$$m_1(v_1 - w_1)(v_1 + w_1) = m_2(w_2 - v_2)(w_2 + v_2)$$

Podobně si upravíme i první rovnici:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2$$

$$m_1v_1 - m_1w_1 = m_2w_2 - m_2v_2$$

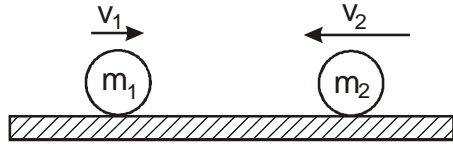
$$m_1(v_1 - w_1) = m_2(w_2 - v_2)$$

$$\frac{m_1(v_1 - w_1)(v_1 + w_1) = m_2(w_2 - v_2)(w_2 + v_2)}{m_1(v_1 - w_1) = m_2(w_2 - v_2)} \Rightarrow (v_1 + w_1) = (w_2 + v_2)$$

$$(v_1 + w_1) = (w_2 + v_2) \Rightarrow v_1 - v_2 = w_2 - w_1$$

Dokonale pružný centrální ráz je popsán dvojicí rovnic:
$$\begin{aligned} m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1w_1 + m_2w_2 \\ v_1 - v_2 &= w_2 - w_1 \end{aligned}$$

Př. 4: Kuličky se pohybují proti sobě způsobem naznačeným na obrázku. Urči jejich rychlosti po srážce. $m_1 = 0,5 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $v_1 = 5 \text{ m/s}$, $v_2 = 10 \text{ m/s}$.



$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2 \Rightarrow 0,5 \cdot 5 + 1 \cdot (-10) = 0,5w_1 + w_2$$

$$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \Rightarrow 5 - (-10) = w_2 - w_1$$

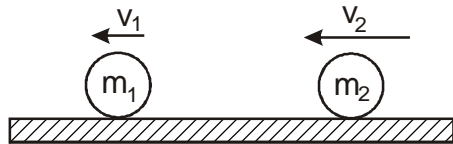
$$\underline{-7,5 = 0,5w_1 + w_2}$$

$$15 = w_2 - w_1 \Rightarrow w_2 = 15 + w_1$$

Dosadíme do první rovnice: $-7,5 = 0,5w_1 + (15 + w_1)$.

$$-22,5 = 1,5w_1 \Rightarrow w_1 = -15 \text{ m/s} \quad w_2 = 15 + w_1 = 15 + (-15) = 0 \text{ m/s}$$

Př. 5: Kuličky se pohybují směrem způsobem naznačeným na obrázku. Urči jejich rychlosti po srážce. $m_1 = 0,5 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $v_1 = 5 \text{ m/s}$, $v_2 = 10 \text{ m/s}$.



$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2 \Rightarrow 0,5 \cdot 5 + 1 \cdot 10 = 0,5w_1 + w_2$$

$$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \Rightarrow 5 - 10 = w_2 - w_1$$

$$\underline{12,5 = 0,5w_1 + w_2} \quad / \cdot 2$$

$$-5 = w_2 - w_1 \Rightarrow w_2 = w_1 - 5$$

Dosadíme do první rovnice: $25 = w_1 + 2w_2 = w_1 + 2(w_1 - 5)$.

$$25 = 3w_1 - 10 \quad 35 = 3w_1 \Rightarrow w_1 = \frac{35}{3} \text{ m/s} = 11,7 \text{ m/s}$$

$$w_2 = w_1 - 5 = \frac{35}{3} - 5 = \frac{20}{3} \text{ m/s} = 6,7 \text{ m/s}$$

Př. 6: Odvoď ze soustavy pro dokonale pružný centrální ráz
$$\begin{aligned} m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1w_1 + m_2w_2 \\ v_1 - v_2 &= w_2 - w_1 \end{aligned}$$
 vzorec pro výslednou rychlost w_1 .

$$w_2 = v_1 - v_2 + w_1$$

Dosadíme do první rovnice: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2(v_1 - v_2 + w_1)$.

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2v_1 - m_2v_2 + m_2w_1 \quad m_1w_1 + m_2w_1 = m_1v_1 + m_2v_2 - m_2v_1 + m_2v_2$$

$$w_1 = \frac{2m_2v_2 + m_1v_1 - m_2v_1}{m_1 + m_2}$$