## 1.3.4 Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici

**Předpoklady:** 1303

Opakování:
K veličinám popisujícím posuvný pohyb existují analogické veličiny popisující pohyb po kružnici:

| rovnoměrný pohyb | pojítko | rovnoměrný pohyb po kružnici |
|---|---|---|
| dráha $s$ $[\mathrm{m}]$ | $s=\varphi r$ | úhel $\varphi[\mathrm{rad}]$ |
| rychlost $v$ $[\mathrm{m/s}]$ $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ | $v=\omega r$ | úhlová rychlost $[\mathrm{rad/s}]$ $\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ |

Rovnoměrný pohyb i rovnoměrný pohyb po kružnici popisují analogické vzorce:

| rovnoměrný pohyb | rovnoměrný pohyb po kružnici |
|---|---|
| $v=\text{konstanta}$ | $\omega=\text{konstanta}$ |
| $s=s_0+vt$ | $\varphi=\varphi_0+\omega t$ |

Žádné kolo se však netočí věčně, musí se občas roztočit a občas zastavit $\Rightarrow$ pohyb po kružnici je v takovém případě zrychlený a úhlová rychlost se během tohoto zrychlování mění.

**Př. 1:** Na základě analogie s přímočarým zrychlením zapiš definiční vztah pro úhlové zrychlení $\varepsilon$ a urči jeho jednotku.

Platí: $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ $\Rightarrow$ analogicky $\varepsilon=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

$$\varepsilon=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\Rightarrow \text{jednotka}=\frac{\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}=\mathrm{rad/s}^2$$

**Při změně rychlosti otáčení se předmět pohybuje s nenulovým úhlovým zrychlením $\varepsilon=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. Jednotkou úhlového zrychlení je $\mathrm{rad/s}^2$.**

**Př. 2:** Doplň tabulku s přehledem normálních a úhlových veličin.

| normální veličiny | pojítko | úhlové veličiny |
|---|---|---|
| dráha $s$ $[\mathrm{m}]$ | $s=\varphi r$ | úhel $\varphi[\mathrm{rad}]$ |
| rychlost $v$ $[\mathrm{m/s}]$ $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ | $v=\omega r$ | úhlová rychlost $[\mathrm{rad/s}]$ $\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ |
| zrychlení $v$ $[\mathrm{m/s}^2]$ | $a_t=\varepsilon r$ | úhlové zrychlení $[\mathrm{rad/s}^2]$ |

| | | |
|---|---|---|
| $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ | | $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ |

V posledním řádku tabulky uvedeno místo obyčejného zrychlení $a$ **tečné zrychlení** $a_t$. Více si vysvětlíme příští hodinu. Zatím nám bude stačit, že tečné zrychlení označuje část vektoru zrychlení, která mění velikost rychlostí. To, co jsme si dosud pod pojmem zrychlení představovali, je právě tečné zrychlení (zvětšuje rychlost automobilu na přímé silnici, brzdí krabičku sunoucí se po stole, urychluje padající předměty). Že existuje i „jiné“ zrychlení, se přesvědčíme hned příští hodinu.

**Pedagogická poznámka:** V klasické učebnici se pojem tečného a normálového zrychlení uvádí ihned po zavedení pojmu zrychlení. V mé praxi se to neosvědčuje, než se studenti dostanou k prvnímu použití normálového zrychlení uplyne tolik času, že na něj zapomenou. Zde použitý přístup také lépe odpovídá celkovému pojetí učebnice jako cesty, která řeší problémy až ve chvíli, kdy nastanou.

**Př. 3:** Při zapínaní a vypínání harddisk své otáčky zvětšuje nebo zmenšuje přibližně rovnoměrně. Z klidu se roztočí za 5 s. Vypočti jeho úhlové zrychlení, je-li jeho konstantní rychlost otáčení 7200 ot/min.

$\Delta t = 5\,\text{s}$, $\omega_0 = 0\,\text{rad/s}$, $\omega = 7200\,\text{ot/min} = 120\,\text{ot/s} = 240\pi\,\text{rad/s} = 754\,\text{rad/s}$, $\varepsilon = ?$

$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 754 - 0\,\text{rad/s} = 754\,\text{rad/s}$.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{754}{5} = 151\,\text{rad/s}^2$$

Harddisk se roztáčí s úhlovým zrychlením $151\,\text{rad/s}^2$.

**Př. 4:** Rovnoměrně zrychlený pohyb je popsán trojicí rovnic pro jednotlivé veličiny *a*, *v*, *s*: $a = \text{konstanta}$, $v = v_0 + at$, $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Najdi analogickou trojici rovnic pro úhlové veličiny $\varepsilon$, $\omega$, $\varphi$.

- Rovnice pro $\varepsilon$: rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici $\Rightarrow$ úhlové zrychlení se nemění $\Rightarrow$ $\varepsilon = \text{konstanta}$.
- Rovnice pro $\omega$: zaměníme veličiny v rovnici $v = v_0 + at$ za jejich úhlové analogie $\Rightarrow$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ (logické úhlová rychlost se rovná původní úhlové rychlost a přírůstku způsobenému úhlovým zrychlením).
- Rovnice pro $\varphi$: zaměníme veličiny v rovnici $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ za jejich úhlové analogie $\Rightarrow$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$ (opět logické, konečný úhel se skládá ze tří částí, počáteční hodnoty úhlu, přírůstku způsobeného počáteční úhlovou rychlostí a přírůstku způsobeného úhlovým zrychlením).

**Pedagogická poznámka:** Snažím se, aby všichni studenti sestavili rovnice sami, podle jejich vzorů pro rovnoměrně zrychlený pohyb. Jde o to, aby si vybudovali analogii normální a úhlových veličin a nesnažili se zbytečně pamatovat dvě sady rovnic.

Upozornění se možná zdá zbytečné, ale je faktem, že studenti to nedělají a často si toho ani nevšimnou.

Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici je popsán trojicí rovnic pro jednotlivé veličiny $\varepsilon$, $\omega$, $\varphi$:

- $\varepsilon = \text{konstanta}$
- $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
- $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$

**Př. 5:** Harddisk z třetího příkladu se po vypnutí zastaví za 8 s. Jaké je jeho úhlové zrychlení? Kolik otáček ještě vykoná?

$\Delta t = 8\,\text{s}$, $\omega = 0\,\text{rad/s}$, $\omega_0 = 7200\,\text{ot/min} = 120\,\text{ot/s} = 240\pi\,\text{rad/s} = 754\,\text{rad/s}$, $\varepsilon = ?$, $n = ?$

Pro výpočet úhlového zrychlení použijeme rovnici pro úhlovou rychlost. Známe v ní všechny veličiny kromě úhlového zrychlení.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 754}{8}\,\text{rad/s}^2 = -94,25\,\text{rad/s}^2$$

Za zadaných veličin můžeme určit úhel otočení. Pokud tento úhel vydělíme $2\pi$ (velikost jedné otáčky v radiánech), získáme počet otáček.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = 0 + 754 \cdot 8 + \frac{1}{2}(-94,25)8^2\,\text{rad} = 3016\,\text{rad}$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{3016}{2\pi} = 480$$

Harddisk se zastavuje s úhlovým zrychlením $-94,25\,\text{rad/s}^2$ a před zastavením udělá ještě 480 otáček.

Kompletní přehled analogie normálních a úhlových veličin u kruhového pohybu:

| **normální veličiny** | **pojítko** | **úhlové veličiny** |
|---|---|---|
| dráha $s$ $[\text{m}]$ | $s = \varphi r$ | úhel $\varphi[\text{rad}]$ |
| rychlost $v$ $[\text{m/s}]$<br>$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ | $v = \omega r$ | úhlová rychlost $[\text{rad/s}]$<br>$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ |
| zrychlení $v$ $[\text{m/s}^2]$<br>$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ | $a = \varepsilon r$ | úhlové zrychlení $[\text{rad/s}^2]$<br>$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ |

| **rovnoměrný pohyb** | **rovnoměrný pohyb po kružnici** |
|---|---|
| $v = \text{konstanta}$ | $\omega = \text{konstanta}$ |
| $s = s_0 + vt$ | $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ |

| **rovnoměrně zrychlený pohyb** | **rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici** |
|---|---|
| $a = \text{konstanta}$ | $\varepsilon = \text{konstanta}$ |
| $v = v_0 + at$ | $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ |

| | |
|---|---|
| $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ | $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$ |

$\Rightarrow$ Při řešení příkladů na rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici postupujeme obdobně jako při řešení příkladů pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

**Př. 6:** Setrvačníkové kolo, které se otáčí 500 krát za minutu, bylo po dobu 15 sekund urychlováno s úhlovým zrychlením $\varepsilon = 5\,\mathrm{rad/s^2}$. Jaký počet otáček za minutu dosáhne?

$f_0 = 500\,\mathrm{ot/\,min} = 500\,\mathrm{ot/60\,s} = \frac{50}{6}\,\mathrm{ot/s} = \frac{50}{6}\,\mathrm{Hz}$, $\varepsilon = 5\,\mathrm{rad/s^2}$, $t = 15\,\mathrm{s}$, $f = ?$

Kolo se pohybuje rovnoměrně zrychleným kruhovým pohybem. Počáteční frekvenci musíme přepočítat na úhlovou rychlost. Spočteme konečnou úhlovou rychlost a z ní konečnou frekvenci.

a) výpočet počáteční úhlové rychlosti

$$\omega_o = 2\pi f_0 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{50}{6} = 52{,}4\,\mathrm{rad/s}$$

b) výpočet konečné úhlové rychlosti

$$\omega = \omega_o + \varepsilon t$$

$$\omega = 52{,}4 + 5 \cdot 15 = 52{,}4 + 75 = 127{,}4\,\mathrm{rad/s}$$

c) výpočet konečné frekvence

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}\,\mathrm{Hz}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{127{,}4}{2\pi}\,\mathrm{Hz} = 20{,}27\,\mathrm{Hz} = 1217\,\mathrm{ot/min}$$

Setrvačníkové kolo dosáhne úhlové rychlosti 1217 ot/min.

**Dodatek:** Příklad by šel počítat i přímým odvozením vztahu pro konečnou frekvenci:

$\omega = \omega_o + \varepsilon t$ dosadíme $\omega_o = 2\pi f_0$ a $\omega = 2\pi f$

$$2\pi f = 2\pi f_0 + \varepsilon t \quad /:2\pi$$

$$f = f_0 + \frac{\varepsilon}{2\pi} t$$

Dosazení: $f = f_0 + \frac{\varepsilon}{2\pi} t = \frac{50}{6} + \frac{5}{2\pi} 5\,\mathrm{Hz} = 20{,}27\,\mathrm{Hz}$.

Vztah nápadně připomíná vztah pro úhlovou rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu po kružnici $\omega = \omega_o + \varepsilon t$, kde místo úhlového zrychlení $\varepsilon$ v $\mathrm{rad/s^2}$ vystupuje výraz $\frac{\varepsilon}{2\pi}$, což není nic jiného než úhlové zrychlení v jednotkách $\mathrm{ot/s^2}$ (dělením výrazem $2\pi$, převádíme z radiánů na otáčky). Po zamyšlení je to samozřejmé, protože frekvence je úhlová rychlost v jednotkách $\mathrm{ot/s^2}$ a musí pro ni platit i rovnice pro úhlovou rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu.

**Př. 7:** Rotor elektromotoru (poloměr 12 cm) se po vypnutí zastavil za 15 s, přičemž vykonal ještě 54 celých otáček. Urči:
a) počáteční úhlovou a obvodovou rychlost
b) úhlové zrychlení
c) tečné zrychlení na obvodu
d) počáteční frekvenci

$t = 15\,\text{s}$, $n = 54$, $r = 12\,\text{cm} = 0{,}12\ \text{m}$, $f_0 = ?$, $\varepsilon = ?$, $a_t = ?$, $v_0 = ?$, $\omega_0 = ?$

Rotor se po vypnutí pohyboval rovnoměrně zpomaleným pohybem.

**a) určení počáteční úhlové a obvodové rychlosti**

Rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici: $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

Úhel otočení můžeme snadno určit z počtu vykonaných otáček $\Rightarrow$ v obou rovnicích neznáme dvě veličiny $\Rightarrow$ musíme z jedné rovnice dosadit do druhé.

$$\omega = 0 = \omega_0 + \varepsilon t \ \Rightarrow\ \varepsilon = -\frac{\omega_0}{t}$$

Dosadíme do první rovnice: $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{t}\right)t^2 = \omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0 t = \frac{1}{2}\omega_0 t$.

Dosadíme vztah mezi úhlem a počtem otáček $n = \frac{\varphi}{2\pi} \ \Rightarrow\ \varphi = 2\pi n$.

$$\varphi = \frac{1}{2}\omega_0 t = 2\pi n$$

$$\omega_0 = \frac{4\pi n}{t} = \frac{4\cdot\pi\cdot 54}{15}\,\text{rad/s} = 45{,}2\,\text{rad/s}$$

$$v_0 = \omega_0 r = 45{,}2\cdot 0{,}12\,\text{m/s} = 5{,}43\,\text{m/s}$$

**b) určení úhlového zrychlení**

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{\frac{4\pi n}{t}}{t} = -\frac{4\pi n}{t^2} = -\frac{4\cdot\pi\cdot 54}{15^2}\,\text{rad/s}^2 = 3{,}02\,\text{rad/s}^2$$

**c) určení tečného zrychlení**

$$a_t = r\cdot\varepsilon = 0{,}12\cdot 3{,}02\,\text{m/s}^2 = 0{,}362\,\text{m/s}^2$$

**d) určení počáteční frekvence**

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\frac{4\pi n}{t} = 2\pi f_0$$

$$f_0 = \frac{2n}{t} = \frac{2\cdot 54}{15}\ \text{Hz} = 7{,}2\,\text{Hz}$$

**Př. 8:** Setrvačné kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením $2\,\text{rad/s}^2$ a otočí se za dobu $\Delta t = t_2 - t_1 = 5$ s o úhel 75 rad. Jak dlouho se již roztáčelo před měřenými pěti sekundami?

$\varepsilon = 2\,\text{rad/s}^2$, $\Delta t = 5\,\text{s}$, $\Delta\varphi = 75\,\text{rad}$, $\omega_0 = 0\,\text{rad/s}$, $t = ?$

Úhel otočení od počátku roztáčení do času $t_1$: $\varphi_1 = \frac{1}{2}\varepsilon t_1^2$.

Úhel otočení od počátku roztáčení do času $t_2$: $\varphi_2 = \frac{1}{2}\varepsilon t_2^2$.

Dosadíme: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{2}\varepsilon t_2^2 - \frac{1}{2}\varepsilon t_1^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\left(t_2^2 - t_1^2\right)$

Chceme spočítat $t_1$. Vyjádříme tedy $t_2$ pomocí $\Delta t$: $t_2 = t_1 + \Delta t$.

Dosadíme: $\Delta\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon\left(t_2^2 - t_1^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\left(t_1 + \Delta t\right)^2 - t_1^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon\left(t_1^2 + 2t_1\Delta t + \Delta t^2 - t_1^2\right)$.

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon\left(2t_1\Delta t + \Delta t^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon 2t_1\Delta t + \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2$$

$$\varepsilon t_1\Delta t = \Delta\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2$$

$$t_1 = \frac{\Delta\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2}{\varepsilon\Delta t}$$

$$t_1 = \frac{\Delta\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2}{\varepsilon\Delta t} = \frac{75 - \frac{1}{2}2\cdot 5^2}{2\cdot 5} = 5\,\mathrm{s}$$

Setrvačné kolo se před měřenými 5 sekundami otáčelo 5 sekund.

**Shrnutí:** Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici je analogií rovnoměrně zrychleného pohybu.