1.3.3 Rovnoměrný pohyb po kružnici II

Předpoklady: 1302

Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí:

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_2-s_1}{\Delta t}=\frac{\varphi_2 r-\varphi_1 r}{\Delta t}=\frac{(\varphi_2-\varphi_1)r}{\Delta t}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}r=\omega\cdot r$$

$\Rightarrow$ Můžeme si doplnit tabulku srovnání běžných a úhlových veličin:

Srovnáme si veličiny pro rovnoměrný pohyb a rovnoměrný pohyb po kružnici:

posuvný pohyb	**pojítko**	**pohyb po kružnici**
dráha s $[\mathrm{m}]$	$s=\varphi r$	úhel $\varphi[\mathrm{rad}]$
rychlost v $[\mathrm{m/s}]$ $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v=\omega r$	úhlová rychlost $[\mathrm{rad/s}]$ $\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Vidíme, že každá veličina pro normální pohyb má odpovídající úhlovou veličinu.

Víme, jak vypadaly rovnice pro rovnoměrný pohyb:

- $v=\text{konstanta}$
- $s=s_0+vt$

Jak budou vypadat odpovídající rovnice pro rovnoměrný pohyb po kružnici?

- Rovnoměrný pohyb $\Rightarrow$ úhlová rychlost se nemůže měnit $\Rightarrow$ $\omega=\text{konstanta}$.
- Jak bude přibývat úhel otočení?
  Stejná úhlová rychlost $\Rightarrow$ úhel rovnoměrně roste s časem: $\varphi=\omega\cdot t$ (při započítání počátečního úhlu φ_0: $\varphi=\varphi_0+\omega t$).

$\Rightarrow$ Snadno můžeme sestavit tabulku vzorců pro rovnoměrný pohyb po kružnici:

rovnoměrný pohyb	**rovnoměrný pohyb po kružnici**
$v=\text{konstanta}$	$\omega=\text{konstanta}$
$s=s_0+vt$	$\varphi=\varphi_0+\omega t$

Dodatek: Předchozí výsledek snadno získáme i pomocí matematické úpravy rovnice:

$s=s_0+vt$ (dosadíme $s=\varphi\cdot r$, $s_0=\varphi_0 r$, $v=\omega\cdot r$)

$\varphi\cdot r=\varphi_0\cdot r+\omega\cdot r\cdot t \quad /:r$

$\varphi=\varphi_0+\omega t$

Pedagogická poznámka: Myslím, že největším přínosem kruhového pohybu je analogie s posuvným pohybem. Studenti nemají tendence si tímto způsobem uspořádávat informace sami, je nutné jim vztahy připomínat a trvat na tom, aby je používali.

Př. 1: Plotna harddisku u počítačového serveru je otáčí rychlostí 7200 otáček za minutu. Urči, jakou úhlovou rychlostí se otáčí. Jakou rychlostí se pohybuje bod na jejím kraji? Server běží celý rok bez jediného vypnutí. Urči, jaký úhel a jakou vzdálenost urazí bod na jejím okraji. Průměr plotny je 9,5 cm.

$\Delta\varphi=7200\,\mathrm{ot}=14400\pi\,\mathrm{rad}$ $\quad \Delta t=1\,\mathrm{min}=60\,\mathrm{s}$ $\quad d=9{,}5\,\mathrm{cm}\Rightarrow r=0{,}0475\,\mathrm{m}$ $\quad \omega=?$

$v=?$ $\quad t=1\,\mathrm{rok}=365\cdot 24\cdot 3600\,\mathrm{s}=31536000\,\mathrm{s}$ $\quad \varphi=?$ $\quad s=?$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{14400\pi}{60}\,\text{rad/s} = 240\pi\,\text{rad/s} \doteq 754\,\text{rad/s}$$
$$v = \omega r = 754 \cdot 0,0475\,\text{m/s} = 35,8\,\text{m/s} = 129\,\text{km/h}$$
$$\varphi = \omega t = 754 \cdot 31536000\,\text{rad} = 2,38 \cdot 10^{10}\,\text{rad}$$
$$s = \varphi r = 2,38 \cdot 10^{10} \cdot 0,0425\,\text{m} = 1,31 \cdot 10^{9}\,\text{m} = 1,31 \cdot 10^{6}\,\text{km}$$

Dodatek: Pro porovnání střední vzdálenost Země-Měsíc je přibližně 385000 km. Krajní bod harddisku ji za rok stihne urazit 3,4 krát.

Rychlost otáčení je však určena i periodou a frekvencí $\Rightarrow$ musí existovat vzorec pro výpočet úhlové rychlosti z těchto dvou veličin.

Dosadíme do vzorce $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$: Perioda je doba nutná k otočení o jednu otáčku – úhel 2π.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{(použili jsme vzorec } \frac{1}{T} = f \text{)}$$

Pro periodu, frekvenci a úhlovou rychlost platí vztah $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

Př. 2: Dětský kolotoč se otáčí s periodou 3,5 s. Urči frekvenci jeho pohybu, jeho úhlovou rychlost a rychlost, se kterou se pohybují děti, jejich sedačka je 2 m od středu kolotoče.

$T = 3,5\,\text{s}$ $\quad r = 2\,\text{m}$ $\quad f = ?$ $\quad \omega = ?$ $\quad v = ?$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,5}\,\text{Hz} = 0,29\,\text{Hz}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3,5}\,\text{rad/s} = 1,80\,\text{rad/s}$$
$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 2}{3,5}\,\text{m/s} = 3,59\,\text{m/s}$$

Př. 3: Urči frekvenci otáčení kola automobilu, který jede po dálnici rychlostí $130\,\text{km/h}$. Průměr kola je 50 cm.

$v_1 = 130\,\text{km/s} = 36\,\text{m/s}$ $\quad d = 50\,\text{cm} \Rightarrow r = 25\,\text{cm}$ $\quad \omega = ?$

Pokud auto jede a kola nejsou ve smyku, musí se obvodová rychlost kol rovnat rychlosti auta (kola se při valivém pohybu „pokládají“ na povrch silnice) $\Rightarrow$ použijeme vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí.

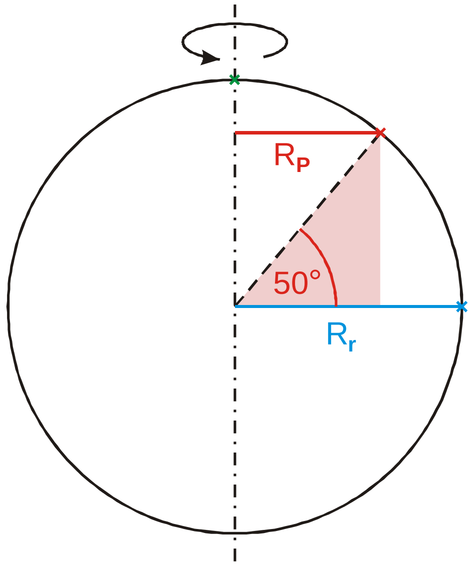
$$v = \omega \cdot r = 2\pi f \cdot r \Rightarrow f = \frac{v}{2\pi r}$$
$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{36}{2 \cdot \pi \cdot 0,25}\,\text{Hz} = 23\,\text{Hz}$$

Kola automobilu se otáčejí s frekvencí 23 Hz.

Pedagogická poznámka: Další příklady řeší studenti už zcela samostatně a každý se dostane tam, kam mu jeho schopnosti a snaha dovolí.

Př. 4: Vypočti úhlovou rychlost, kterou se pohybuje člověk stojící na povrchu Země ($R_Z = 6378\,\text{km}$) kvůli její rotaci kolem osy. Pomocí této rychlosti obvodovou rychlost, kterou se pohybuje člověk, který stojí:
a) na rovníku b)v Praze ($50°$ severní šířky) c) na pólu

$R_Z = 6378\,\text{km} = 6378000\,\text{m} = R_r$ $T = 1\,\text{den} = 24\,\text{h} = 86400\,\text{s}$



Kolmá vzdálenost Prahy od osy otáčení Země:

$$\frac{R_P}{R} = \cos 50° \Rightarrow R_P = R \cdot \cos 50° = 6378 \cdot \cos 50° = 4100\,\text{km}.$$

Kolmá vzdálenost pólu od osy otáčení Země: $R_t = 0\,\text{m}$.
Všechny body na Zemi se otáčí se stejnou úhlovou rychlostí. Obvodovou rychlost určíme pomocí vztahu $v = \omega r$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{84600}\,\text{rad/s} = 0.0000743\,\text{rad/s}$$

a) $v_r = \omega R = 0.0000743 \cdot 6378000\,\text{m/s} = 464\,\text{m/s}$

b) $v_P = \omega R_P = 0.0000743 \cdot 3974000\,\text{m/s} = 289\,\text{m/s}$

c) $v_t = \omega R_t = 0.0000743 \cdot 0\,\text{m/s} = 0\,\text{m/s}$ (to jsme ani nemuseli počítat)

a) Člověk na rovníku se kvůli rotaci Země pohybuje rychlostí $464\,\text{m/s}$.
b) Člověk v Praze se kvůli rotaci Země pohybuje rychlostí $289\,\text{m/s}$.
c) Člověk na pólu se kvůli rotaci Země pohybuje rychlostí $0\,\text{m/s}$.

Př. 5: Filmová kamera snímá 24 obrázků za sekundu. Spočti, při jakých reálně možných rychlostech automobilu se bude na filmovém plátně zdát, že se jeho kola neotáčejí. Průměr kol je 40 cm, jejich disky mají na sobě trojcípou hvězdu.

$f_0 = 24\,\text{Hz}$ $r = 20\,\text{cm} = 0,2\,\text{m}$ $v = ?$
Kamera snímá 24 obrázků za sekundu. Kolo automobilu bude na plátně stát, když ho kamera zachytí pokaždé ve stejné pozici, což znamená, že se otočí za jednu čtyřiadvacetinu sekundy. Kolo by se tak muselo otáčet s frekvencí 24 Hz nebo s násobkem této frekvence. Protože je kolo trojcípé, vypadá stejně nejen při otočení o 360°, ale i při otočení o 120°. Stačí tedy, když se kolo otáčí třetinovou rychlostí tedy s frekvencí 8 Hz. Rychlost auta pak spočteme jako obvodovou rychlost bodu na kraji kola.
$f = \frac{1}{3} f_0$

$v = \omega \cdot r = 2\pi f \cdot r = 2\pi \frac{1}{3} f_0 \cdot r = \frac{2}{3}\pi f_0 \cdot r$

$v = \frac{2}{3}\pi f_0 \cdot r = \frac{2}{3}\pi \cdot 24 \cdot 0,2 = 10\,\mathrm{m/s}$

Auto musí jet rychlostí 36 km/h nebo násobkem této rychlosti.

Př. 6: Rychlost bodu na kraji rotujícího kotouče na 6 m/s. Rychlost druhého bodu, který je o 20 cm k ose otáčení blíž, je jen 4 m/s. Urči úhlovou rychlost otáčení kotouče a jeho poloměr.

$v_1 = 6\,\mathrm{m/s}$ $\quad v_2 = 4\,\mathrm{m/s}$ $\quad r_1 = r_2 - 0,2\,\mathrm{m}$ $\quad r_2 = ?$

Pokud jsou dva body na jednom kruhu, který se otáčí, je jejich úhlová rychlost stejná, obvodové rychlosti se liší kvůli rozdílné vzdálenosti od středu. Z rovnosti úhlových rychlostí vytvoříme rovnici o jedné neznámé.

$\omega = \frac{v}{r}$ tedy pro první bod: $\omega = \frac{v_1}{r_1}$, a pro druhý bod: $\omega = \frac{v_2}{r_2}$

$$\frac{v_2}{r_2} = \frac{v_1}{r_1}$$

$$r_2 v_1 = r_1 v_2$$

$$r_2 v_1 = (r_2 - 0,2) v_2$$

$$r_2 v_1 = r_2 v_2 - 0,2 v_2$$

$$r_2 v_2 - r_2 v_1 = 0,2 v_2$$

$$r_2 = \frac{0,2 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$\omega = \frac{v_2}{r_2} = \frac{v_2}{\frac{0,2 v_2}{v_2 - v_1}} = \frac{v_2 (v_2 - v_1)}{0,2 v_2} = \frac{v_2 - v_1}{0,2}$$

$$r = \frac{0,2 v}{v - v_1} = \frac{0,2 \cdot 6}{6 - 4} = 0,6\,\mathrm{m}$$

$$\omega = \frac{v - v_1}{0,2}$$

$$\omega = \frac{v - v_1}{0,2} = \frac{6 - 4}{0,2} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

Zkoumaný kruh má poloměr 0,4 m a otáčí se úhlovou rychlostí 10 rad/s.

Shrnutí: Rovnoměrný pohyb po kružnici je blízkou analogií rovnoměrného pohybu.