## 1.3.2 Rovnoměrný pohyb po kružnici I

**Předpoklady:** 1110, 1301

**Pedagogická poznámka:** Na začátku jsem předpokládal, že rovnoměrný pohyb po kružnici je možné probrat za jednu hodinu (díky analogii s běžným rovnoměrným pohybem). Ukázalo se, že množství nových písmenek a vzorečků (z nichž většina nových není, ale studenti to takto neberou) je v této rychlosti pro studenty nestravitelné.

Opakování z minulé hodiny: pohyb po kružnici měříme pomocí úhlu otočení $\varphi$, který měříme v radiánech. Pro dráhu pohybu pak platí jednoduchý vztah $s = \varphi r$.

**Př. 1:** Navrhni způsoby, jak ověřit zda je otáčení předmětu rovnoměrné.

Změříme, jak dlouho tvá jedna otáčka. Pokud pokaždé vyjde stejné číslo, je otáčení rovnoměrné.
Změříme počet otáček, za nějakou dopředu určenou dobu. Pokud za stejnou dobu předmět vykoná vždy stejný počet otáček, je otáčení rovnoměrné.

Předchozí úvahy nejsou zcela přesné, ale použijeme je k zavedení dvou nových veličin, které popisují rovnoměrný pohyb po kružnici:

**perioda *T*** :doba potřebná k vykonání jedné otáčky (otočení o $2\pi \text{rad} = 360°$), udává se v sekundách
**frekvence *f***: počet otáček, které předmět vykoná za 1 sekundu, udává se v hertzích $[1\,\text{Hz}]$

**Př. 2:** Urči periodu a frekvenci:
a) kolotoče, který vykoná jednu otáčku za 4 s
b) kotoučové pily, která vykoná za 1 sekundu 20 otáček

a) kolotoče, který vykoná jednu otáčku za 4 s
doba jedné otáčky 4 s $\Rightarrow$ $T = 4\,\text{s}$
za jednu sekundu stihneme pouze $\frac{1}{4}$ otáčky $\Rightarrow$ $f = 0{,}25\,\text{Hz}$

b) kotoučové pily, která vykoná za 1 sekundu 20 otáček
za 1 sekundu 20 otáček $\Rightarrow$ $f = 20\,\text{Hz}$
na jednu otáčku připadne pouze $\frac{1}{20}\text{s}$ $\Rightarrow$ $T = \frac{1}{20}\text{s} = 0{,}05\,\text{s}$.

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad se zdá být zbytečně lehký, ale ukázalo se, že bez něj je pro většinu studentů následující příklad téměř neřešitelný.

**Př. 3:** Urči periody a frekvence následujících pohybů:
a) otáčení Země kolem své osy

b) otáčení plotny počítačového harddisku rychlostí $7200\,\text{ot/min}$

c) otáčení gramofonové desky rychlostí $33\frac{1}{3}\,\text{ot/min}$ .

a) otáčení Země kolem své osy
Země se otočí kolem osy za 24 hodin $\Rightarrow$ $T = 24\,\text{h} = 86400\,\text{s}$
frekvence = počet otáček za 1 s

| | | |
|---|---|---|
| 1 otáčka | … | 86400 s |
| *f* otáček | … | 1 s |

$$f = \frac{1}{86400} \cdot 1\,\text{Hz} = 1{,}16 \cdot 10^{-5}\,\text{Hz} \;\Rightarrow\; f = 1{,}16 \cdot 10^{-5}\,\text{Hz}$$

b) otáčení plotny počítačového harddisku rychlostí $7200\,\text{ot/min}$

| | | |
|---|---|---|
| 7200 otáček | … | 60 s |
| 1 otáčka | … | *T* |

$$T = \frac{60}{7200}\,\text{s} = 0{,}0083\,\text{s} \;\Rightarrow\; T = 0{,}0083\,\text{s}$$

| | | |
|---|---|---|
| 7200 otáček | … | 60 s |
| *f* otáček | … | 1 s |

$$f = \frac{7200}{60}\,\text{Hz} = 120\,\text{Hz} \;\Rightarrow\; f = 120\,\text{Hz}$$

c) otáčení gramofonové desky rychlostí $33\frac{1}{3}\,\text{ot/min}$

| | | |
|---|---|---|
| $33\frac{1}{3}$ otáčky | … | 60 s |
| 1 otáčka | … | *T* |

$$T = \frac{60}{33{,}\overline{3}}\,\text{s} = 1{,}8\,\text{s} \;\Rightarrow\; T = 1{,}8\,\text{s}$$

| | | |
|---|---|---|
| $33\frac{1}{3}$ otáčky | … | 60 s |
| *f* otáček | … | 1 s |

$$f = \frac{33{,}\overline{3}}{60}\,\text{Hz} = 0{,}\overline{5}\,\text{Hz} \;\Rightarrow\; f = 0{,}56\,\text{Hz}$$

**Pedagogická poznámka:** Samozřejmě není v žádném případě nutné, aby studenti řešili příklady pomocí přímé úměrnosti, důležité je, aby věděli, že k vyřešení příkladu v nejhorším případě stačí trojčlenka a význam termínu perioda a frekvence.

**Př. 4:** Najdi za základě výpočtu předchozího příkladu vztah mezi periodou a frekvencí.

Z příkladu je vidět, že platí $T = \frac{1}{f}$ .
Vztah odpovídá i spočteným hodnotám: větší hodnota periody znamená malou hodnotu frekvence a opačně.

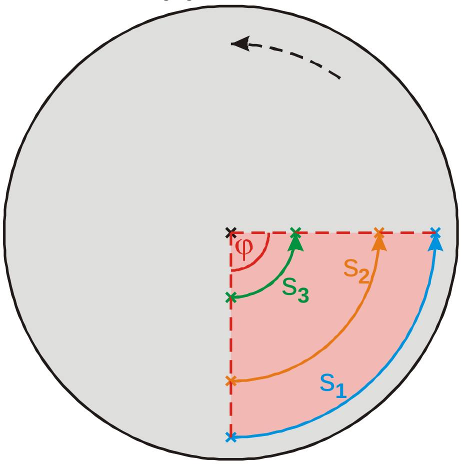
Pro frekvenci a periodu platí vztah $T = \frac{1}{f}$. Platí tedy $1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$.

Kritéria pro rovnoměrnost pohybu po kružnici z úvodu hodiny nejsou zcela správná $\Rightarrow$ poučíme se z minulosti, kdy jsme studovali rovnoměrný pohyb = pohyb jehož okamžitá rychlost se neměnila, platilo $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{konstanta}$.

Srovnáme si veličiny pro rovnoměrný pohyb a rovnoměrný pohyb po kružnici:

| rovnoměrný pohyb | pojítko | rovnoměrný pohyb po kružnici |
|---|---|---|
| dráha $s\ [\mathrm{m}]$ | $s = \varphi r$ | úhel $\varphi[\mathrm{rad}]$ |

Dráhu jsme nahradili úhlem, protože úhel otočení je stejný pro všechny body na kružnici nezávisle na jejich vzdálenosti od osy.




Z obrázku (i životní zkušenosti) je zřejmé, že i rychlosti pohybu jednotlivých bodů se budou lišit (kvůli rozdílné vzdálenosti od osy se liší dráhy, které během stejné doby urazily) pohybovat různou rychlostí (evidentně záleží na vzdálenosti od osy) $\Rightarrow$ vyplatí se zavést rychlost, která popisuje změnu úhlu (u všech bodů se mění stejným způsobem) - **úhlovou rychlost** $\omega$.

**Př. 5:** Na základě analogie s nekruhovým pohybem zformuluj definici úhlové rychlosti. V jakých jednotkách se bude měřit?

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{změna\ dráhy}{změna\ času} \Rightarrow \omega = \frac{změna\ dráhy}{změna\ času} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

Jednotka: $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{1\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{rad/s}$

**Rychlost otáčení se udává pomocí úhlové rychlosti:** $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$**. Jednotkou úhlové rychlosti je** $\mathrm{rad/s}$**.**

**Př. 6:** Urči úhlovou rychlost otáčení:
a) kolotoče, který vykoná jednu otáčku za 4 s
b) kotoučové pily, která vykoná za 1 sekundu 20 otáček

Dosazujeme do vzorce $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$:

a) kolotoč, který vykoná jednu otáčku za 4 s

$\Delta\varphi = 1\,\text{ot} = 2\pi\,\text{rad}$, $\Delta t = 4\,\text{s}$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{4}\,\text{rad/s} = 1{,}57\,\text{rad/s}$$

b) kotoučové pily, která vykoná za 1 sekundu 20 otáček

$\Delta\varphi = 20\,\text{ot} = 20\cdot 2\pi\,\text{rad} = 40\pi\,\text{rad}$, $\Delta t = 1\,\text{s}$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{40\pi}{1}\,\text{rad/s} = 126\,\text{rad/s}$$

**Pedagogická poznámka:** Stejně jako u periody a frekvence jsou předchozí příklady důležité pro větší úspěšnost při řešení následujícího příkladu. Občas se objevují i jiné postupy řešení (například u bodu a) v následujícím příkladu studenti počítají hodnoty pro 1 hodinu), většinou se dají využít demonstraci toho, že všechny správné cesty vedou ke stejnému správnému cíli.

**Př. 7:** Urči úhlovou rychlost:
a) otáčení Země kolem své osy
b) otáčení plotny počítačového harddisku rychlostí $7200\,\text{ot/min}$
c) otáčení gramofonové desky rychlostí $33\frac{1}{3}\,\text{ot/min}$

Dosazujeme do vzorce $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

a) otáčení Země kolem své osy

$\Delta\varphi = 1\,\text{ot} = 2\pi\,\text{rad}$, $\Delta t = 24\,\text{h} = 24\cdot 3600\,\text{s} = 86400\,\text{s}$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{86400}\,\text{rad/s} = 7{,}27\cdot 10^{-5}\,\text{rad/s}$$

b) otáčení plotny počítačového harddisku rychlostí $7200\,\text{ot/min}$

$\Delta\varphi = 7200\,\text{ot} = 14400\pi\,\text{rad}$, $\Delta t = 1\,\text{min} = 60\,\text{s}$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{14400\pi}{60}\,\text{rad/s} = 754\cdot 10^{-5}\,\text{rad/s}$$

c) otáčení gramofonové desky rychlostí $33\frac{1}{3}\,\text{ot/min}$

$\Delta\varphi = 33\frac{1}{3}\,\text{ot} = \frac{100}{3}\,ot = \frac{100}{3}\cdot 2\pi\,\text{rad} = \frac{200\pi}{3}\,\text{rad}$, $\Delta t = 1\,\text{min} = 60\,\text{s}$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{200\pi}{3}}{60}\,\text{rad/s} = 3{,}49\,\text{rad/s}$$

**Př. 8:** Rozhodni, jaká veličina se udává v jednotce otáčky/min , a najdi její převodní vztah k základní jednotce této veličiny.

otáčky/min : podíl úhlu (změny úhlu) a času $\Rightarrow$ $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega$ - jde o úhlovou rychlost $\Rightarrow$ základní jednotka rad/s .

$1\frac{\text{ot}}{\text{min}} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{60\,\text{s}} = \frac{\pi}{30}\,\text{rad/s}$ .

**Př. 9:** Najdi vztah mezi úhlovou rychlostí $\omega$ otáčení předmětu a velikostí okamžité rychlosti $v$ bodu, který leží na tomto předmětu ve vzdálenosti $r$ od osy otáčení.

Hledáme pojítko mezi úhlovou a normální veličinou, jedno už máme $s = \varphi r$ $\Rightarrow$ zkusíme jej využít:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 r - \varphi_1 r}{\Delta t} = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) r}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} r = \omega \cdot r$$

**Shrnutí:** Všechny body na otáčejícím se předmětu se pohybují se stejnou úhlovou rychlostí. Jejich obvodové rychlosti závisí na vzdálenosti od středu otáčení a proto se liší.