1.2.16 Zákon zachování hybnosti II

Předpoklady: 1215

Pedagogická poznámka: Cíl hodiny je jednoduchý. Studenti by se měli naučit samostatně rozhodovat, jak bude vypadat dosazení konkrétní situace do zákona zachování hybnosti. Jde o jednu z nejlepších příležitostí k tomu, aby se studenti naučili „zařídit se podle aktuálních podmínek“. Proto je nutné, aby studenti měli dost času na samostatné řešení příkladů. Nikdy neradím těm, kteří se nepokusili sami o řešení a mají prázdný papír.

Pedagogická poznámka: Ve všech následujících příkladech je použitý poměrně striktní postup, který vyhovuje průměrným a podprůměrným. Lepším a rychlejším studentům nijak nebráním v jiných postupech. Pokud však udělají chybu, chci, aby se vrátili k původnímu postupu jako jistotě.

Zákon zachování hybnosti: Celková hybnost izolované soustavy těles se zachovává.
Pro dvě tělesa platí: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2$.
Nejdříve si spočteme příklad z minulé hodiny:

Př. 1: Střela o hmotnosti 10 g je vystřelena z pušky o hmotnosti 4 kg rychlostí 800 m/s. Vypočti zpětnou rychlost pušky.

$m_s = 10\text{ g} = 0{,}01\text{ kg}$ $\quad m_p = 4\text{ kg}$ $\quad v_s = 800\text{ m/s}$ $\quad v_p = ?$

ZZH: $m_s v_s + m_p v_p = m_s w_s + m_p w_p$

Před výstřelem kulka i puška stojí $\Rightarrow$ $v_s = 0$, $v_p = 0$

$0 = m_s w_s + m_p w_p$

$m_s w_s = -m_p w_p$

$$v_p = -\frac{m_s v_s}{m_p} = -\frac{0{,}01 \cdot 800}{4}\text{ m/s} = -2\text{ m/s}.$$

Znaménko mínus nám říká, že puška pohybuje na opačnou stranu než kulka.
Puška získá kvůli zpětnému rázu rychlost 2 m/s.

Př. 2: Vagón o hmotnosti 4 t jede po vodorovných kolejích rychlostí 0,5 m/s a narazí na vagón o hmotnosti 2 t, který jede týmž směrem rychlostí 0,2 m/s. Při nárazu se oba vagóny spojí a dále se pohybují společně. Urči rychlost po srážce. Tření a odpor vzduchu zanedbej.

$m_1 = 4\text{ t} = 4000\text{ kg}$ $\quad v_1 = 0{,}5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ $\quad m_2 = 2\text{ t} = 2000\text{ kg}$ $\quad v_2 = 0{,}2\text{ m/s}$ $\quad w = ?$

Během srážky je podstatné pouze vzájemné působení obou vagónů, platí pak pro ně zákon zachování hybnosti. Rychlost obou vozíků směřuje stejným směrem, obě rychlosti mají stejné znaménko.

ZZH: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2$

Vagóny se spojí $\Rightarrow$ $w_1 = w_2 = w$ $\Rightarrow$ $m_1 w_1 + m_2 w_2 = (m_1 + m_2) w$.

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) w$

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{4000 \cdot 0,5 + 2000 \cdot 0,2}{4000 + 2000} \text{ m/s} = 0,4 \text{ m/s}$$

Oba vagóny se po srážce budou pohybovat rychlostí $0,4 \text{ m/s}$.

Př. 3: Vagón o hmotnosti 4 t jede po vodorovných kolejích rychlostí 0,5 m/s a narazí na vagón o hmotnosti 2 t, který jede proti němu rychlostí 0,3 m/s. Při nárazu se oba vagóny spojí a dále se pohybují společně. Urči rychlost po srážce. Tření a odpor vzduchu zanedbej.

$m_1 = 4 \text{ t} = 4000 \text{ kg}$ $\quad v_1 = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $\quad m_2 = 2 \text{ t} = 2000 \text{ kg}$ $\quad v_2 = -0,3 \text{ m/s}$ $\quad w = ?$

Během srážky je podstatné pouze vzájemné působení obou vagónů, platí pak pro ně zákon zachování hybnosti. Rychlost obou vozíků směřuje opačnými směry, obě rychlosti musí mít opačné znaménko. Jako kladný směr si zvolíme například směr rychlosti v_1.

ZZH: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2$

Vagóny se spojí $\Rightarrow$ $w_1 = w_2 = w$ $\Rightarrow$ $m_1 w_1 + m_2 w_2 = (m_1 + m_2) w$.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) w$$

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{4000 \cdot 0,5 + 2000 \cdot (-0,3)}{4000 + 2000} \text{ m/s} = 0,25 \text{ m/s}$$

Oba vagóny se po srážce budou pohybovat rychlostí $0,25 \text{ m/s}$ ve směru pohybu prvního vagónu..

Pedagogická poznámka: Studenti cítí, že se předchozí příklad od příkladu 2 musí odlišovat, ale často to dělají tím, že vkládají mínusy místo do hodnot do výchozí rovnice. Je třeba se s nimi bavit, jestli se něco mění na tom, že se zajímáme o celkovou hybnost před a celkovou po srážce nebo na tom, jaký směr hybnosti mají. Často stačí připomenout, že i hybnost má stejně jako rychlost směr.

Př. 4: Střela pohybující se rychlostí 20 m/s vybuchla a roztrhla se na dvě části o hmotnostech 10 kg a 5kg. Lehčí část střely měla rychlost 90 m/s a pohybovala se ve stejném směru jako střela před roztržením. Urči rychlost těžší části střely.

$v = 20 \text{ m/s}$ $\quad m_l = 5\ kg$ $\quad m_t = 10\ kg$ $\quad w_l = 90 \text{ m/s}$ $\quad w_t = ?$

Při výbuchu střely na sebe působily pouze vzájemně její části, musí proto platit zákon zachování hybnosti.

$$m_l v_l + m_t v_t = m_l w_l + m_t w_t$$

Před výbuchem letěly obě části pohromadě: $v_t = v_t = v$ $\Rightarrow$ $m_l v_l + m_t v_t = (m_l + m_t) v$.

$$(m_l + m_t) v = m_l w_l + m_t w_t$$

$m_t w_t = (m_l + m_t)v - m_l w_l$

$$w_t = \frac{(m_l + m_t)v - m_l w_l}{m_t} = \frac{(5+10)20 - 5\cdot 90}{10}\,\text{m/s} = -15\,\text{m/s}$$

Těžší část střely letí po výbuchu rychlostí 15 m/s v opačném směru, než ve kterém letěla střela před výbuchem.

Př. 5: Na pramici o hmotnosti 60 kg spolu plují kluk o hmotnosti 75 kg a dívka o hmotnosti 50 kg. Pramice s oběma pasažéry se pohybuje rychlostí 2 m/s , když z ní kluk skočí do vody tak, že vodorovná složka jeho rychlosti má velikost 6 m/s. Urči, jakou rychlostí se bude po jeho skoku pohybovat dívka s lodí, pokud kluk vyskočil:
a) ve směru jízdy loďky b) proti směru jízdy loďky.

Během odrazu na sebe pouze působí loď s dívkou a kluk $\Rightarrow$ platí zákon zachování hybnosti.
Dívka je celou dobu na loďce $\Rightarrow$ můžeme dívku s loďkou považovat za jedno těleso.
ZZH: $m_k v_k + m_{dl} v_{dl} = m_k w_k + m_{dl} w_{dl}$

Před odrazem kluk stojí v loďce $\Rightarrow$ $v_k = v_{dl} = v$ $\Rightarrow$ $m_k v_k + m_{dl} v_{dl} = (m_k + m_{dl})v$.

$(m_k + m_{dl})v = m_k w_k + m_{dl} w_{dl}$

$(m_k + m_{dl})v - m_k w_k = m_{dl} w_{dl}$

$$w_{dl} = \frac{(m_k + m_{dl})v - m_k w_k}{m_{dl}}$$

a) Kluk se odráží ve směru jízdy loďky $\Rightarrow$ $v = 2\,\text{m/s}$, $w_k = 6\,\text{m/s}$

$$w_{dl} = \frac{(m_k + m_{dl})v - m_k w_k}{m_{dl}} = \frac{(75+110)\cdot 2 - 75\cdot 6}{110}\,\text{m/s} = -0{,}73\,\text{m/s}$$

b) Kluk se odráží proti směru jízdy loďky $\Rightarrow$ $v = 2\,\text{m/s}$, $w_k = -6\,\text{m/s}$

$$w_{dl} = \frac{(m_k + m_{dl})v - m_k w_k}{m_{dl}} = \frac{(75+110)\cdot 2 - 75\cdot(-6)}{110}\,\text{m/s} = 7{,}45\,\text{m/s}$$

Pokud se kluk odrazí ve směru jízdy, loď se rozjede na opačnou stranu rychlostí 0,73 m/s.
Pokud se kluk odrazí proti směru jízdy, loď se rozjede rychlostí 7,45 m/s.

Př. 6: O kolik kg své váhy přijde kosmická loď o hmotnosti 10 t, když zvýší svou rychlost z 7 km/s na 8 km/s. Spálené palivo opouští trysky lodě přibližně rychlostí 15 km/s. Změnu hmotnosti rakety v průběhu zrychlování zanedbej. Jak by se změnil výsledek, kdybychom ji nezanedbávali?

$M_l = 10\,\text{t} = 10000\,\text{kg}$ $v_1 = 7\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1} = 7000\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $v_2 = 8\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1} = 8000\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$v_p = 15\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1} = 15000\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $m_p = ?$

Hybnost celé rakety před odhozením paliva se musí rovnat hybnosti, jakou bude mít raketa a palivo po této změně. Nezapomeňte, že palivo se pohybuje na opačnou stranu než raketa, je proto třeba započítat tuto rychlost jako zápornou.

$M_l v_1 = m_p v_p + M_l v_2$

$$m_p = \frac{M_l v_1 - M_l v_2}{v_p}$$

$$m_p = \frac{M_l v_1 - M_l v_2}{v_p} = \frac{10000 \cdot 7000 - 10000 \cdot 8000}{-15000} \text{ kg} = 667 \text{ kg}$$

Kosmická loď při zrychlování ztratí 667 kg své váhy. Kdybychom změnu hmotnosti rakety při zrychlování nezanedbávali, byla by výsledná rychlost rakety větší, než jsme spočetli, protože hmotnost rakety by klesala a tím by vzrůstalo zrychlování rakety (stejnou silou by se urychlovala menší hmotnost).

Př. 7: Rozeber z fyzikálního hlediska zatloukání hřebíků. Jaké by měly být vlastnosti kladiva. Proč se hřebíky snadno zatloukají do pevně opřených předmětů? Proč je při zatloukání hřebíku do pohyblivého předmětů vhodné jej na druhé straně podepřít sekyrou nebo jiným těžkým předmětem?

Kladivo funguje jako zásobník na hybnost. Má velkou hmotnost a díky rozmachu i poměrně velkou rychlost. Před dopadem na hřebík má značnou hybnost, kterou ztratí, když se zabrzdí o zatloukaný hřebík. Zastavení kladiva způsobí síla, kterou na kladivo působí hřebík (v každém okamžiku se rovná síle, kterou působí kladívko na hřebík a kterou chceme zvětšit). Snažíme se o co nejkratší dobu brždění kladiva, protože podle impulsové věty znamená větší působící sílu.

Nepodepřený hřebík se při úderu dává do pohybu. Tím prodlužuje dobu, kterou působí kladivo na hřebík. Delší doba působení nutná ke změně hybnosti kladiva, znamená menší působící sílu (při zatloukání nevýhoda).

Hřebík můžeme podepřít těžkým předmětem, který kladivo nedokáže snadno uvést do pohybu. Hřebík pak nemůže uhnout před kladivem, zkrátí se doba po kterou kladivo působí na hřebík a tím se zvětší působící síla.

Pohled zákona zachování hybnosti:

Kladivo má velkou hybnost, kterou nárazem a zabržděním předá hřebíku, který ji pak ztrácí při pronikání do dřeva. Čím více hybnosti kladivo hřebíku předá, tím více hřebík pronikne do dřeva (pokud se neohne):

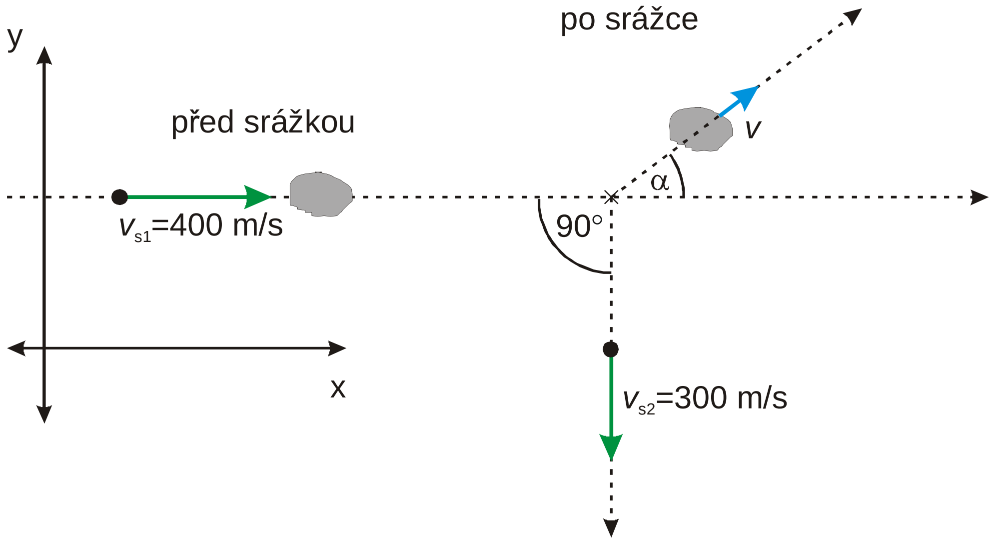
- Kladivo musí být těžké a rychle se pohybovat.
- Kladivo se musí při srážce s hřebíkem zastavit (aby předalo maximum hybnosti).
- Srážka kladiva s hřebíkem musí být co nejkratší, aby vnější síly hrály co nejmenší roli a kladivo předávalo hybnost pouze hřebíku.

Př. 8: Kámen o hmotnosti 0,1 kg leží na vodorovném hladkém ledu. Střela o hmotnosti 2,5 g letící vodorovně rychlostí 400 m/s narazí na kámen a odrazí se kolmo ke svému původnímu směru rychlostí 300 m/s. Vypočti velikost rychlosti kamene po nárazu střely a urči směr, v němž se kámen po nárazu bude pohybovat. Tření mezi ledem a kamenem zanedbej.

$m_k = 0{,}1 \text{ kg}$ $m_s = 2{,}5 \text{ g} = 0{,}0025 \text{ kg}$ $v_{s1} = 400 \text{ m/s}$ $v_{s2} = 300 \text{ m/s}$

$v_{2k} = ?$ $\alpha = ?$

Během srážky dochází pouze k vzájemnému působení střely a kamene, pro obě tělesa tak musí platit zákon zachování hybnosti. Příklad je složitější, protože se střela odrazila kolmo ke svému původnímu směru – pohyb tak neprobíhá v jediném směru a musíme ho sledovat ve dvou souřadnicích.



Použijeme dvakrát zákon zachování hybnosti – pro směry os *x* a *y*. Získáme tak rychlosti kamene ve směrech obou os, pomocí Pythagorovy věty a goniometrických funkcí pak ze získaných složek určíme rychlost i směr, který rychlost kamene svírá s osou *x*.
Zákon zachování hybnosti pro směr *x*:
Hybnost kuličky střely před srážkou = hybnost kamene po srážce ve směru *x*.

$$m_s v_{s1} = m_k v_{kx} \Rightarrow v_{kx} = \frac{m_s v_{s1}}{m_k}$$

Zákon zachování hybnosti pro směr *y*:
0 (ve směru *y* se před srážkou ani jeden z předmětů nepohyboval) = hybnost kamene po srážce ve směru *y* + hybnost střely po srážce (střela se pohybuje pouze ve směru osy *y*).

$$0 = m_k v_{ky} + m_s v_{s2} \Longrightarrow v_{ky} = -\frac{m_s v_{s2}}{m_k}$$

$$v_{kx} = \frac{m_s v_{s1}}{m_k} = \frac{0{,}0025 \cdot 400}{0{,}1}\ \text{m/s} = 10\ \text{m/s}$$

$$v_{ky} = -\frac{m_s v_{s2}}{m_k} = -\frac{0{,}0025 \cdot (-300)}{0{,}1}\ \text{m/s} = 7{,}5\ \text{m/s}$$ (střela po srážce směřuje podle obrázku proti směru osy *y*)

$$v_k = \sqrt{v_{kx}^2 + v_{ky}^2} = \sqrt{10^2 + 7{,}5^2}\ \text{m/s} = 12{,}5\ \text{m/s}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_{ky}}{v_{kx}} = \frac{7{,}5}{10} \Rightarrow \alpha = 36°52' \doteq 37°$$

Kámen se po srážce pohybuje rychlostí 12,5 m/s a směr jeho pohybu svírá úhel $37°$ se směrem, ze kterého přiletěla střela.

Př. 9: Při vyšetřování automobilových havárií policisté určují rychlost vozidel při nárazu ze stop pneumatik. Urči přibližnou rychlost škodovky, která brzdila 20 m před srážkou a po ní ještě odtlačila v okamžiku srážky stojící druhou škodovku o 8 m. Hmotnost obou automobilů byla přibližně stejná, koeficient tření mezi pneumatikami škodovky a silnicí byl v době havárie 0,7.

$s_1 = 20\ \text{m}$ $s_2 = 8\ \text{m}$ $f = 0{,}7$ $v_0 = ?$

Havárie se dá rozdělit do tří částí. Rovnoměrné brždění auta na dráze 20 m, srážku se stojící škodovkou (během srážky je možné zanedbat vnější síly a tak použít zákon zachování hybnosti) a rovnoměrné brždění obou automobilů po srážce na dráze 8 m.
Pokud předpokládáme, že auta brzdila smykem (staré škodovky nemají ABS), můžeme z velikosti třecí síly určit jejich zrychlení, a tak dopočítat od konce průběh všech tří částí pohybu.

a) rovnoměrně zpomalený pohyb aut po srážce

Zrychlení aut po srážce: $a = \frac{F}{m}$.

Výslednou silou působící na auta je smykové tření aut o povrch vozovky: $F = F_t = Nf = mgf = 2m_s gf$.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2m_s gf}{2m_s} = gf$$

Známe a, s, $v = 0$ m/s , zaměníme zpomalený pohyb s nulovou výslednou rychlostí za zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí.

$v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}$ $\qquad$ $s = \frac{1}{2}at^2$ (dosadíme $t = \frac{v}{a}$)

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$$

$$v^2 = 2sa$$

$$v = \sqrt{2sa}$$

Doplníme k veličinám indexy: $v_2 = \sqrt{2s_2 gf}$.

Určili jsme rychlost, kterou se obě auta pohybovala po srážce.

b) srážka obou aut

Srážka probíhá velmi rychle, působení vnějších sil na auta během srážky zanedbáváme a tak můžeme použít zákon zachování hybnosti.
Hybnost škodovky + hybnost stojící škodovky = hybnost obou aut po srážce.

$$v_1 m_s + 0 = v_2 \left(m_s + m_s\right)$$

$$v_1 m_s = 2v_2 m_s$$

$$v_1 = 2v_2 = 2\sqrt{2s_2 gf}$$

c) rovnoměrně zpomalený pohyb škodovky před srážkou

Zrychlení škodovky před srážkou: $a = \frac{F}{m}$.

Výslednou silou působící na auto je smykové tření kol o povrch vozovky:

$$F = F_t = Nf = mgf = m_s gf$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{m_s gf}{m_s} = gf$$

Známe a, s, konečnou rychlost $v = v_2$, použijeme vzorce pro rovnoměrně zpomalený pohyb.

$v = v_0 - at \Rightarrow t = \frac{v_0 - v}{a}$ $\qquad$ $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$ (dosadíme $t = \frac{v_0 - v}{a}$)

$$s = v_0\left(\frac{v_0 - v}{a}\right) - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_0 - v}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2 - v_0 v}{a} - \frac{1}{2}a\frac{v_0^2 - 2v_0 v + v^2}{a^2}$$

$$s = \frac{2v_0^2 - 2v_0 v}{2a} - \frac{v_0^2 - 2v_0 v + v^2}{2a} = \frac{2v_0^2 - 2v_0 v - \left(v_0^2 - 2v_0 v + v^2\right)}{2a} = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$$

$$2sa = v_0^2 - v^2$$

$$v_0^2 = v^2 + 2sa$$

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2sa}$$

Doplníme k veličinám indexy: $v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2s_1 a}$.

Dosadíme za zrychlení: $v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2s_1 gf}$.

Dosadíme do vztahu za v_1: $v_0 = \sqrt{\left(2\sqrt{2s_2 gf}\right)^2 + 2s_1 gf} = \sqrt{4\cdot 2s_2 gf + 2s_1 gf} = \sqrt{2gf\left(s_1 + 4s_2\right)}$.

$$v_0 = \sqrt{2gf\left(s_1 + 4s_2\right)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0,7\left(20 + 4\cdot 8\right)}\ \text{m/s} = 27\ \text{m/s} = 97\ \text{km/h}$$

Havarující škodovka měla ve chvíli, kdy začala brzdit přibližně rychlost 97 km/h.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad asi nestihne. Přesto ho na závěr hodiny zmiňujeme před celou třídou, abychom si ukázali, že v podstatě nejde o nic jiného než rozdělení složitějšího problému na tři jednodušší příklady.

Shrnutí: