1.2.13 Nakloněná rovina II

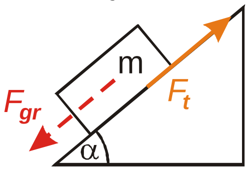
Předpoklady: 1212

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny se za normálních okolností samozřejmě nedá stihnout, záleží na Vás, co si vyberete.

Pedagogická poznámka: Na začátku hodiny zadám studentům příklad 1. Nečekám příliš dlouho, po chvilce si ukážeme rovnost $F_{gr} = F_t$ a pak je opět nechám. Většina z nich však ztroskotá na dosazení za síly F_{gr}, F_t. Napíšu jim všechny vzorce na tabuli s tím, že je to naposledy a příště se bude neznalost kteréhokoliv z nich trestat.

Př. 1: Koeficient statického tření mezi krabičkou a dřevem je $f_0 = 0,3$. Urči maximální úhel nakloněné roviny, při kterém se krabička samovolně nerozjede. Jak se bude pohybovat, pokud do ní na nakloněné rovině s tímto úhlem strčíme?

Krabička se může pohybovat pouze ve směru roviny $\Rightarrow$ nakreslíme obrázek se všemi silami, které mají směr nakloněné roviny a působí na krabičku.



Se zvětšování sklonu roviny roste velikost složky gravitační síly F_{gr} a zmenšuje se tření $\Rightarrow$ při maximálním úhlu se tyto dvě síly rovnají: $F_{gr} = F_t$.

Dosadíme: $F_{gr} = mg\sin\alpha$ $\qquad$ $F_t = N \cdot f = F_{gk} f = mg\cos\alpha \cdot f$

$mg\sin\alpha = mg\cos\alpha f$

$\sin\alpha = \cos\alpha f$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha = f$

Dosazení: $\mathrm{tg}\alpha = f = 0,3 \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}0,3 = 16°42'$

Nakloněná rovina může mít maximálně úhel $16°42'$. Pokud do krabičky na takové rovině strčíme, začne se pohybovat, místo statického tření se objeví menší dynamické a krabička se bude pohybovat rovnoměrně zrychleně.

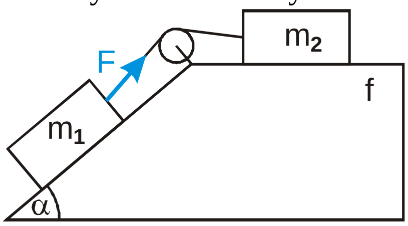
Př. 2: Změř pomocí nakloněné roviny hodnotu klidového tření mezi dvěma povrchy. Porovnej zjištěnou hodnotu s naměřenou hodnotou dynamického tření. Demonstruj pomocí nakloněné roviny, že statická třecí síla je větší než dynamická třecí síla.

Využijeme řešení předchozího příkladu. Změříme maximální úhel nakloněné roviny, při kterém se krabička ještě nerozjede.
Například pro pokusný kvádřík na sololitu platí: $\alpha_{\max} = 23°$.
$f = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\,23° = 0,42$

Pedagogická poznámka: Pokud máte jenom trochu času změřte koeficient tření přímo pomocí sil F_g a F_t, aby studenti viděli, že obě zcela odlišné metody dávají stejný výsledek.

Pedagogická poznámka: Následujícímu druhu příkladů opět patří do kategorie „vozíčků“. Je samozřejmě otázkou, zda tyto příklady v takovém množství cvičit. Osobně se mi líbí, že se studenti procvičují v řešení příkladů „od rozboru sil“ a v postupném řešení. Největším problémem pro studenty je rozdělení příkladů na postupné kroky:
obrázek se silami
výraz pro F
doplnění vztahů pro jednotlivé síly
výpočet zrychlení
výpočet síly
V některých učebnicích bývá způsob, který používám při řešení, odmítán jako nesprávný, protože nemůžeme počítat zrychlení všech vozíčků, když každý z nich zrychluje v jiném směru. Osobně považuji tento přístup za přehnaně puristický. Následující příklady se příliš neliší od situace, kdy ze stolu začne padat provázek. Každá jeho část zrychluje v jiném směru, přesto s ním počítáme jako s jedním tělesem.

Př. 3: Urči zrychlení soustavy na obrázku. Urči velikost vyznačené síly F. Tření uvažuj.

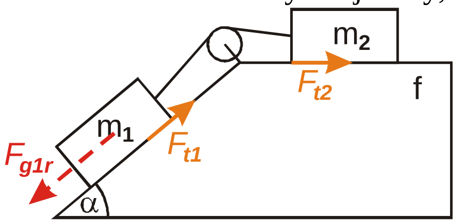


$m_1 = 2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, $\alpha = 40°$, $f = 0{,}3$.

Výpočet zrychlení:

Druhý Newtonův zákon: $a = \frac{F}{m}$

Nakreslíme do obrázku všechny vnější síly, které působí na libovolné závaží ve směru jeho pohybu.



Výsledná síla: $F = F_{g1r} - F_{t1} - F_{t2}$

Spočteme jednotlivé síly:

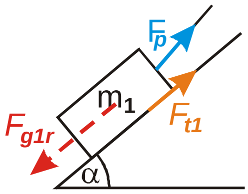
- $F_{g1r} = F_{g1} \sin\alpha = m_1 g \sin\alpha$
- $F_{t1} = N_1 f = F_{g1k} f = F_{g1} \cos\alpha \cdot f = m_1 g \cos\alpha \cdot f$
- $F_{t2} = N_2 f = F_{g2} f = m_2 g f$

Dosadíme do vzorce: $a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g1r} - F_{t1} - F_{t2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 g \sin\alpha - m_1 g \cos\alpha \cdot f - m_2 g f}{m_1 + m_2}$.

Spočteme hodnotu zrychlení: $a=\frac{2\cdot 10\sin 40°-2\cdot 10\cos 40\cdot 0,3-1\cdot 10\cdot 0,3}{2+1}\text{m/s}^2=1,75\,\text{m/s}^2$

Výpočet síly *F*:

Nakreslíme si všechny síly působící ve směru pohybu na závaží m_1.



Závaží zrychluje směrem dolů: $F_v=F_{g1r}-F_p-F_{t1}$.

Vyjádříme $F_p: F_p=F_{g1r}-F_{t1}-F_v=m_1g\sin\alpha-m_1g\cos\alpha\cdot f-am_1$

Dosazení: $F_p=m_1g\sin\alpha-m_1g\cos\alpha\cdot f-am_1=$
$=2\cdot 10\sin 40°-2\cdot 10\cdot\cos 40°\cdot 0,3-2\cdot 1,75\,\text{N}=4,76\,\text{N}$

Závaží se budou pohybovat se zrychlením $1,75\,\text{m/s}^2$, provázek bude na první závaží působit silou $4,76\,\text{N}$.

Pedagogická poznámka: Následující výpočty studentům pouze ukazuji. Samostatně je nechám počítat pouze ty největší nadšence.

Pro velikost síly, kterou působí provázek na závaží m_1 můžeme odvodit obecný vzorec:

$$F_p=F_{g1r}-F_{t1}-am_1=m_1g\sin\alpha-m_1g\cos\alpha\cdot f-\frac{m_1g\sin\alpha-m_1g\cos\alpha\cdot f-m_2gf}{m_1+m_2}m_1=$$

$$=\frac{(m_1g\sin\alpha-m_1g\cos\alpha\cdot f)(m_1+m_2)-m_1^2g\sin\alpha+m_1^2g\cos\alpha\cdot f+m_1m_2gf}{m_1+m_2}=$$

$$=\frac{m_1^2g\sin\alpha-m_1^2g\cos\alpha\cdot f+m_1m_2g\sin\alpha-m_1m_2g\cos\alpha\cdot f-m_1^2g\sin\alpha+m_1^2g\cos\alpha\cdot f+m_1m_2gf}{m_1+m_2}=$$

$$=\frac{m_1m_2g\sin\alpha-m_1m_2g\cos\alpha\cdot f+m_1m_2gf}{m_1+m_2}$$

Dosazení zjistíme přesnou hodnotu síly:

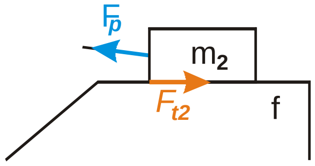
$$F_p=\frac{m_1m_2g\sin\alpha-m_1m_2g\cos\alpha\cdot f+m_1m_2gf}{m_1+m_2}=$$

$$=\frac{2\cdot 1\cdot 10\sin 40°-2\cdot 1\cdot 10\cos 40°\cdot 0,3+2\cdot 1\cdot 10\cdot 0,3}{2+1}\text{N}=4,75\,\text{N}$$

Získali jsme přesnější hodnotu než při řešení příkladu (nedosazovali jsme zaokrouhlené zrychlení).

Podobně spočteme sílu, kterou působí provázek na závaží m_2.

Nakreslíme si všechny síly působící ve směru pohybu na závaží m_2.



Dosadíme do 2. Newtonova zákona pro závaží m_2: $a=\frac{F}{m}=\frac{F_p-F_{t2}}{m_2}$

Vyjádříme F_p: $am_2=F_p-F_{t2}$.

$F_p=am_2+F_{t2}=am_2+m_2gf$

Spočteme hodnotu: $F_p=am_2+F_{t2}=am_2+m_2gf=1,75\cdot 1+1\cdot 10\cdot 0,3\,\text{N}=4,75\,\text{N}$.

Obecným dosazením bychom dostali stejný výraz jako při dosazování před chvilkou:

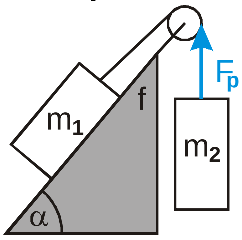
$$F_p = am_2 + F_{t2} = \frac{m_1 g \sin\alpha - m_1 g \cos\alpha \cdot f - m_2 gf}{m_1 + m_2} m_2 + m_2 gf =$$

$$= \frac{m_1 m_2 g \sin\alpha - m_1 m_2 g \cos\alpha \cdot f - m_2^2 gf + m_2 gf\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 g \sin\alpha - m_1 m_2 g \cos\alpha \cdot f - m_2^2 gf + m_2 m_1 gf + m_2^2 gf}{m_1 + m_2} =$$

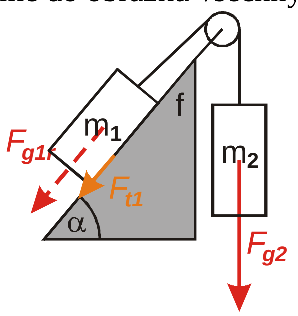
$$= \frac{m_1 m_2 g \sin\alpha - m_1 m_2 g \cos\alpha \cdot f + m_2 m_1 gf}{m_1 + m_2}$$

Př. 4: Urči zrychlení soustavy na obrázku. Urči velikost vyznačené síly F. Tření uvažuj.



$m_1 = 1\,\text{kg}$, $m_2 = 2\,\text{kg}$, $\alpha = 50°$, $f = 0{,}6$.

Výpočet zrychlení:
Nakreslíme do obrázku všechny vnější síly, které působí na libovolné závaží ve směru jeho



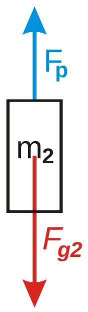
pohybu.
Výsledná síla: $F = F_{g2} - F_{t1} - F_{g1r}$
Spočteme jednotlivé síly:

- $F_{g2} = m_2 g$
- $F_{t1} = N_1 f = F_{g1k} f = F_{g1} \cos\alpha \cdot f = m_1 g \cos\alpha \cdot f$
- $F_{g1r} = F_{g1} \sin\alpha = m_1 g \sin\alpha$

Dosadíme do vzorce: $a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g2} - F_{t1} - F_{g1r}}{m_1 + m_2} = \frac{mg_2 - m_1 g \sin\alpha - m_1 g \cos\alpha \cdot f}{m_1 + m_2}$.

Spočteme hodnotu zrychlení: $a = \frac{2 \cdot 10 - 1 \cdot 10 \sin 50° - 1 \cdot 10 \cos 50° \cdot 0{,}6}{1 + 2}\,\text{m/s}^2 = 0{,}27\,\text{m/s}^2$

Výpočet síly *F*:
Nakreslíme si všechny síly působící ve směru pohybu na závaží m_2.



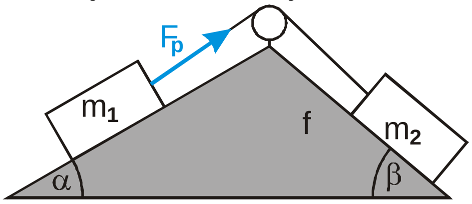
Závaží zrychluje směrem dolů: $F_v = F_{g2} - F_p$

Vyjádříme F_p: $F_p = F_{g2} - F_v = m_2 g - a m_2$

Spočteme hodnotu: $F_p = m_2 g - a m_2 = 2 \cdot 10 - 2 \cdot 0,27\ \mathrm{N} = 19,46\ \mathrm{N}$

Závaží se budou pohybovat se zrychlením $0,27\ \mathrm{m/s^2}$, provázek bude na první závaží působit silou $19,46\ \mathrm{N}$.

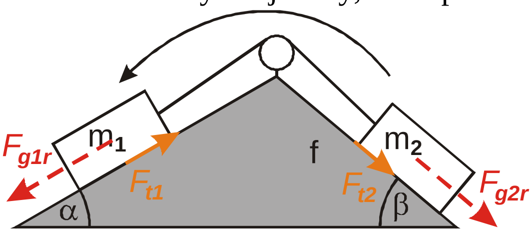
Př. 5: Urči zrychlení soustavy na obrázku. Urči velikost vyznačené síly F. Tření uvažuj.



$m_1 = 3\ \mathrm{kg}$, $m_2 = 2\ \mathrm{kg}$, $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$, $f = 0,4$.

Výpočet zrychlení:

Není zcela jasné, na kterou stranu se soustava bude pohybovat. Zvolíme směr a nakreslíme do obrázku všechny vnější síly, které působí na libovolné závaží ve směru jeho pohybu:



Výsledná síla: $F = F_{g1r} - F_{g2r} - F_{t1} - F_{t2}$

Spočteme jednotlivé síly:

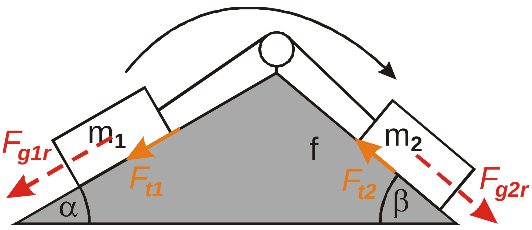
- $F_{g1r} = m_1 g \sin \alpha$
- $F_{g2r} = m_2 g \sin \beta$
- $F_{t1} = N_1 f = F_{g1k} f = F_{g1} \cos \alpha \cdot f = m_1 g \cos \alpha \cdot f$
- $F_{t2} = N_2 f = F_{g2k} f = F_{g2} \cos \beta \cdot f = m_2 g \cos \beta \cdot f$

Dosadíme do vzorce:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g1r} - F_{g2r} - F_{t1} - F_{t2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 g \sin \alpha - m_2 g \sin \beta - m_1 g \cos \alpha \cdot f - m_2 g \cos \beta \cdot f}{m_1 + m_2}.$$

Spočteme hodnotu zrychlení:

$$a = \frac{3 \cdot 10 \sin 30° - 2 \cdot 10 \sin 40° - 3 \cdot 10 \cos 30° \cdot 0,4 - 2 \cdot 10 \cos 40° \cdot 0,4}{3+2} = \frac{-14,4}{5}$$ $\Rightarrow$ Soustava se naznačeným směrem nerozjede $\Rightarrow$ zkusíme opačný směr.



Výsledná síla: $F = F_{g2r} - F_{g1r} - F_{t1} - F_{t2}$

Vzorce pro jednotlivé síly známe. Dosadíme do vzorce:

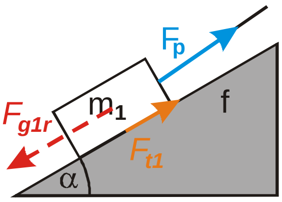
$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g2r} - F_{g1r} - F_{t1} - F_{t2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g \sin\beta - m_1 g \sin\alpha - m_1 g \cos\alpha \cdot f - m_2 g \cos\beta \cdot f}{m_1 + m_2}.$$

Spočteme hodnotu zrychlení:

$$a = \frac{2\cdot 10 \sin 40° - 3\cdot 10 \sin 30° - 3\cdot 10 \cos 30° \cdot 0,4 - 2\cdot 10 \cos 40° \cdot 0,4}{3+2} = \frac{-18,7}{5}$$ $\Rightarrow$ Soustava se nerozjede ani druhým směrem $\Rightarrow$ bude stát na místě.

Výpočet síly *F*:

Nakreslíme si všechny síly působící ve směru pohybu na závaží m_2.



Závaží je v klidu $\Rightarrow$ výsledná síla je nulová: $F_{g1r} = F_p + F_{t1}$

$F_p = F_{g1r} - F_{t1} = m_1 g \sin\alpha - m_1 g \cos\alpha \cdot f =$

$= 3\cdot 10 \sin 30° - 3\cdot 10 \cdot \cos 30° \cdot 0,4\ \text{N} = 4,6\ \text{N}$

Soustava zůstane v klidu, na závaží m_1 působí provázek silou 4,6 N.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad velmi dobře prověřuje zda studenti chápou, co vlastně počítají. Ti, kteří se pořádně neorientují se většinou smíří se zápornou hodnotou zrychlení a postupují zcela stejně jako v předchozích příkladech.

Poznámka: Příklady, ve kterých není příliš jasné, na kterou stranu se soustava začne pohybovat (nebo zda se vůbec pohybovat bude) je samozřejmě jednodušší řešit tím, že si spočítáme velikosti jednotlivých sil a zhodnotíme, zda se soustava může dát do pohybu:

$F_{g1r} = m_1 g \sin\alpha = 3\cdot 10 \sin 30°\ \text{N} = 15\ \text{N}$

$F_{g2r} = m_2 g \sin\beta = 2\cdot 10 \cdot \sin 40°\ \text{N} = 12,9\ \text{N}$

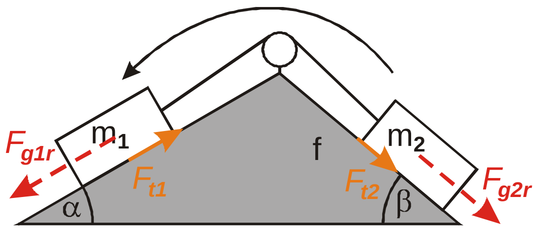
$F_{t1} = m_1 g \cos\alpha \cdot f = 3\cdot 10 \cdot \cos 30° \cdot 0,4\ \text{N} = 10,4\ \text{N}$

$F_{t2} = m_2 g \cos\beta \cdot f = 2\cdot 10 \cdot \cos 40° \cdot 0,4\ \text{N} = 6,1\ \text{N}$

na první pohled je zřejmé, rozdíl dvou rovnoběžných složek gravitačních sil, který uvádí soustavu do pohybu, nemůže překonat obě třecí síly a soustava tak zůstane stát. Ze spočtených hodnot, je také vidět, že síla, kterou působí provázek na závaží m_1 je $F_{g1r} - F_{t1} = 15 - 10,4\ \text{N} = 4,6\ \text{N}$.

Př. 6: Urči maximální hodnotu koeficientu tření, při které by se soustava z předchozího příkladu dala do pohybu.

Ze dvou rovnoběžných složek gravitačních sil, které mohou uvést soustavu do pohybu je větší síla F_{g1r} $\Rightarrow$ soustava by se musela pohybovat za ní.



Výsledná síla: $F = F_{g1r} - F_{g2r} - F_{t1} - F_{t2}$, soustava se nepohybuje pokud $F = 0$.

$m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta - m_1 g \cos\alpha \cdot f - m_2 g \cos\beta \cdot f = 0$

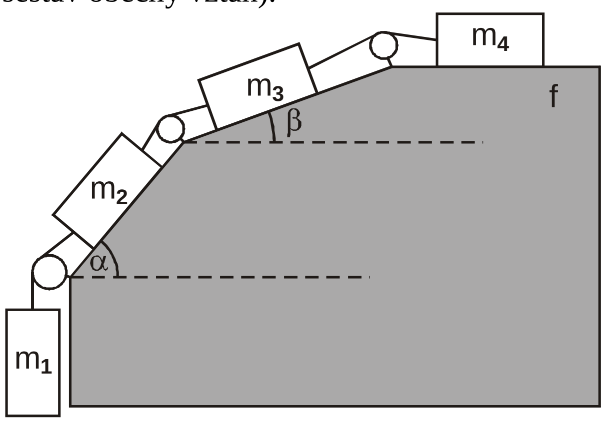
$m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta = f\left(m_1 g \cos\alpha + m_2 g \cos\beta\right)$

$$f = \frac{m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta}{m_1 g \cos\alpha + m_2 g \cos\beta}$$

Dosadíme: $f = \dfrac{m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta}{m_1 g \cos\alpha + m_2 g \cos\beta} = \dfrac{3 \cdot 10 \cdot \sin 30° - 2 \cdot 10 \cdot \sin 40°}{3 \cdot 10 \cdot \cos 30° + 2 \cdot 10 \cdot \cos 40°} = 0{,}052$.

Soustava by se dala do pohybu pouze v případě, že by koeficient tření bel menší než 0,052.

Př. 7: Urči zrychlení soustavy na obrázku. (protože nejsou zadány konkrétní hodnoty, sestav obecný vztah).



Druhý Newtonův zákon: $a = \dfrac{F}{m}$

Postupujeme rovnou bez obrázku se silami:

Výsledná síla: $F = F_{g1} + F_{g2r} + F_{g3r} - F_{t2} - F_{t3} - F_{t4}$

Vztahy pro jednotlivé síly:

- $F_{g1} = m_1 g$
- $F_{g2r} = m_2 g \sin\alpha$
- $F_{g3r} = m_3 g \sin\beta$
- $F_{t2} = m_2 g \cos\alpha \cdot f$
- $F_{t3} = m_3 g \cos\beta \cdot f$
- $F_{t4} = m_4 g \cdot f$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{m_1 g + m_2 g \sin\alpha + m_3 g \sin\beta - m_2 g \cos\alpha \cdot f - m_3 g \cos\beta \cdot f - m_4 g \cdot f}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Shrnutí: Při výpočtu zrychlení soustavy je výhodné nejdříve sestavujeme vztah pro síly a pak teprve hledáme jejich konkrétní vyjádření.